Mngool.com

طرق
تدريس الرياضيات

Teaching and Learning Mathematics

تأليف

فريدريك هـ . بل

ترجمـــة

د . محمد أمين المفتى

أستاذ طرق تدريس الرياضيات المساعد

كلية التربية – جامعة عين شمس

د . ممدوح محمد سليمان

أستاذ طرق تدريس الرياضيات المساعد

كلية التربية – جامعة الزقازيق

مراجعـة

أ.د. وليم تاوضروس عبيد

أستاذ طرق تدريس الرياضيات ووكيل

كلية التربية – جامعة عين شمس

AL DAR AL ARABIA LIL NASHR WA AL TAWZEIA

الدار العربية للنشر والتوزيع

حقوق النشر :

* الطبعة الأجنبية :

* English Edition

by Frederick H. Bell

* الطبعة العربية :

* Arabic Edition

الطبعة العربية الأولى ١٩٨٦
الطبعة العربية الثانية ١٩٨٧

ISBN 977 - 1475 - 0002

للدار العربية للنشر والتوزيع

١٧ شارع نادى الصيد ــ الدقى ــ القاهرة

المحتويـات

مقدمة الناشر

يتزايد الاهتمام باللغة العربية فى بلادنا يوماً بعد يوم ، ولا شك أنه فى الغد القريب ستستعيد اللغة العربية هيبتها التى طالما امتهنت واذلت من أبنائها وغير أبنائها ، ولا ريب فى أن إذلال لغة أية أمة من الأمم هو إذلال ثقافى وفكرى للأمة نفسها ، الأمر الذى يتطلب تضافر جهود أبناء الأمة رجالًا ونساءً طلاباً وطالبات ، علماءً ومثقفين ، مفكرين وسياسيين فى سبيل جعل لغة العروبة تحتل مكانتها اللائقة التى اعترف المجتمع الدولى بها لغة عمل فى منظمة الأمم المتحدة ومؤسساتها فى أنحاء العالم ؛ لأنها لغة أمة ذات حضارة عريقة إستوعبت فيما مضى علوم الأمم الأخرى ، وصهرتها فى بوتقتها اللغوية والفكرية ، فكانت لغة العلوم والآداب ، ولغة الفكر والكتابة والمخاطبة .

إن الفضل فى التقدم العلمى الذى تنعم به دول أوروبا اليوم ، يرجع فى واقعه إلى الصحوة العلمية فى الترجمة التى عاشتها فى القرون الوسطى ، كان المرجع الوحيد للعلوم الطبية والعلمية والاجتماعية ، هى الكتب المترجمة عن العربية لابن سينا وابن الهيثم والفارابى وابن خلدون وغيرهم من عمالقة العرب . ولم ينكر الأوروبيون ذلك ، بل يسجل تاريخهم ما ترجموه عن حضارة الفراعنة والعرب والإغريق ، وهذا يشهد بأن اللغة العربية كانت مطواعة للعلم والتدريس والتأليف ، وأنها قادرة على التعبير عن متطلبات الحياة وما يستجد من علوم وأن غيرها ليس بأدق منها ، ولا أقدر على التعبير . ولكن ما أصاب الأمة من مصائب وجمود بدأ مع عصر الاستعمار التركى ثم البريطانى والفرنسى ، عاق اللغة من النمو والتطور وأبعدها عن العلم والحضارة ، ولكن عندما أحس العرب بأن حياتهم لابد من أن تتغير ، وأن جمودهم لابد أن تدب فيه الحياة ، اندفع الرواد من اللغويين والأدباء والعلماء فى إنماء اللغة وتطويرها ، حتى أن مدرسة القصر العينى فى القاهرة ، والجامعة الأمريكية فى بيروت درَّستا الطب بالعربية أول إنشائهما ، ولو تصفحنا الكتب التى أُلفت أو تُرجمت يوم كان الطب يدرس فيها باللغة العربية لوجدناها كتباً ممتازة لا تقل جودة عن أمثالها من كتب الغرب فى ذلك الحين سواء فى الطبع أو حسن التعبير أو براعة الإيضاح ، ولكن هذين المعهدين تنكرا للغة العربية فيما بعد ، وسادت لغة المستعمر وفرضت على أبناء الأمة فرضاً ، إذ رأى الأجنبى أن فى خنق اللغة مجالًا لعرقلة تقدم الأمة العربية ، وبالرغم من المقاومة العنيفة التى قابلها ، إلا أنه كان بين المواطنين صنائع سبقوا الأجنبى فيما يتطلع إليه فتفننوا فى أساليب التملق له اكتساباً لمرضاته ، ورجال تأثروا بحملات المستعمر الظالمة يشككون فى قدرة اللغة العربية على استيعاب الحضارة الجديدة ، وغاب عنهم ما قاله الحاكم الفرنسى لجيشه الزاحف إلى الجزائر : « علموا لغتنا وانشروها حتى تَحكم الجزائر ، فإذا حَكمت لغتنا الجزائر ، فقد حكمناها حقيقة » .

فهل لى أن أوجه نداءً إلى جميع حكومات الدول العربية بان تبادر فى أسرع وقت ممكن إلى اتخاذ التدابير ، والوسائل الكفيلة باستعمال اللغة العربية لغة تدريس فى جميع مراحل التعليم العام والمهنى ، والجامعى ، مع العناية الكافية باللغات الأجنبية فى مختلف مراحل التعليم لتكون وسيلة الاطلاع على تطور العلم والثقافة والانفتاح على العالم ، وكلنا ثقة من إيمان العلماء والأساتذة بالتعريب نظراً لأن استعمال اللغة القومية فى التدريس ييسر على الطالب سرعة الفهم دون عائق لغوى وبذلك تزداد حصيلته الدراسية ويُرتفع بمستواه العلمى ، وذلك تأصيلًا للفكر العلمى فى البلاد ، وتمكيناً للغة القومية من الأزدهار والقيام بدورها فى التعبير عن حاجات المجتمع وألفاظ ومصطلحات الحضارة والعلوم .

ولا يغيب عن حكومتنا العربية أن حركة التعريب تسير متباطئة أو تكاد تتوقف ، بل تُحارب أحياناً ممن يشغلون بعض الوظائف القيادية فى سلك التعليم والجامعات ممن ترك الإستعمار فى نفوسهم عُقداً وأمراضاً ، رغم أنهم يعلمون أن جامعات إسرائيل قد ترجمت جميع العلوم إلى اللغة العبرية وعدد من يتخاطب بها فى العالم لا يزيد على خمسة عشر مليون يهودياً ، كما أنه من خلال زياراتى لبعض الدول ، واطلاعى قد وجدت كل أمة من الأمم تدرس بلغتها القومية مختلف فروع العلوم والآداب والتقنية كاليابان وأسبانيا وألمانيا ودول أمريكا اللاتينية ، ولم تشكك أمة من هذه الأمم فى قدرة لغتها على تغطية العلوم الحديثة ، فهل أمة العرب أقل شأناً من غيرها !!

وأخيراً ونيابة عن المجموعة التى اشتركت معى حتى الآن فى الإشراف على نشر نحو مائة كتاب علمى مترجم ، نقطع عهداً بأن نحاول دائما أن نسير نحو الأفضل ، فنحن لا ندعى الكمال ، ولكن من المؤكد أن نجاحنا ليس وليد الصدفة ولكنه نتيجة جهد وعمل متواصل دؤوب فى خدمة تعريب المناهج ، والكتب الدراسية طوال عشرة أعوام ، والتعاون والتوجيه المثمر والمخلص من أساتذة أفاضل على اتساع العالم العربى ، وعمل قومى بناء من هيئات التدريس بالجامعات العربية ، أخص منهم بالذكر هيئات التدريس بكليات الزراعة بجامعات عين شمس ، الزقازيق ، الأزهر ، المنصورة ، بنها والقاهرة .

وقد صدق الله العظيم حينما قال فى كتابه الكريم ﴿ **وَقُلْ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُه والمؤمنون ، وستُردُّون إلى عالِم الغيب والشَّهَادَة فَيُنبئكم بما كُنْتُم تَعْمَلُون** ﴾ .

محمد دربالة

الدار العربية للنشر والتوزيع

مقدمة الطبعة العربية
الجزء الأول

يضم هذا الجزء أربعة فصول تتناول الموضوعات الرئيسية التالية : -

١ - مقدمة فى تدريس الرياضيات   ٢ - اعداد دروس الرياضيات

٣ - نماذج لتعليم وتعلم الخبرات المباشرة فى الرياضيات .

٤ - نماذج لتعليم وتعلم الخبرات غير المباشرة فى الرياضيات .

وقد تمت ترجمة هذا الكتاب بما يتلاءم مع البيئة المصرية ونظامها التعليمى وبتصرف لايخل بالمعنى أو المضمون العلمى لما ورد فى الأصل .

وهذا الكتاب يعتبر من المراجع الرئيسية لمعلمى الرياضيات والمهتمين بتدريسها والإشراف على تدريسها ولمؤلفى الكتب المدرسية للرياضيات والباحثين وطلاب الدراسات العليا فى مجال طرق تدريس الرياضيات وتعلمها ، وللطالب المعلم بشعبة الرياضيات بكليات ومعاهد إعداد المعلمين .

ويذخر الكتاب بالأفكار القيمة فى الرياضيات التربوية ، والأمثلة المتنوعة التى تفيد القائمين على تدريس الرياضيات بمختلف المراحل الدراسية .

هذا وللكتاب جزء ثان يعتبر مكملا لهذا الجزء ويتناول موضوعات أكثر شمولا وعمقا .

ونسأل الله أن يكون هذا الجهد المتواضع مكملا للمراجع القيمة فى مجال طرق تدريس الرياضيات التى تحتويها المكتبة العربيه .

فبراير ١٩٨٦

المترجمون

مقدمة الطبعة الأجنبية

إن تدريس الرياضيات مهنة شاقة ، مثيرة بل وداعية للتحدى . وقد نُشر هذا الكتاب لمساعدة مدرسى الرياضيات بالمرحلة الثانوية فى حل العديد من المشكلات اليومية التى يواجهونها فى نطاق نظامنا التعليمى سريع التغير .

والهدف الرئيسى لهذا الكتاب هو مساعدة الطلاب فى كليات إعداد المعلمين وكذلك مساعدة المعلمين القائمين بالعمل حتى يصبحوا أكثر كفاءة من خلال ممارسة وتطبيق تعليم وتعلم مضمون الرياضيات ، مناهج المرحلة الثانوية ، نظريات التعليم وطرق التدريس ، أساليب إدارة الفصل والأنشطة التطبيقية خارج الفصل .

وبالرغم من أن هذا الكتاب موجه إلى المعلمين إلا أنه لم يغفل تعلم التلميذ فى المجالين المعرفى والوجدانى ذلك لأنه لاينظر إلى التدريس فى حد ذاته كغاية ولكن كوسيلة لتيسير عملية التعلم .

وتوجد مجموعة مراجع منتقاه فى نهاية كل فصل ، لمساعدة القارىء فى التعرف على مواد إضافية مرتبطة بالموضوعات التى وردت بالكتاب ، هذا وقد ذكرنا للقارىء كيفية البحث عن مصادر المعلومات والإستفادة من إستخدام المراجع التى إقترحنا قراءتها وقمنا بتوجيه القارىء إلى الاطلاع على العديد من المجلات الحديثة مثل « مدرسى الحساب The arithmetic teacher » ، « مدرسى الرياضيات The mathematics teacher » ، « علوم ورياضيات المدرسة School science and mathematics حتى يكون ملماً بأحدث المعلومات فيما يتعلق بالموضوعات التى تناولها الكتاب .

وفى نهاية كل فصل من فصول الكتاب قمنا باقتراح بعض الأنشطة الإضافية التى يمكن للقارىء مزاولتها وذلك تحت عنوان « أشياء تفعلها » Things to do هذه الأنشطة تساعد القارىء على مراجعة وتحليل وتقييم الأفكار التى وردت فى كل فصل بالكتاب .

لقد صُمم هذا الكتاب لمساعدة مدرسى الرياضيات ليصبحوا مهنيين معتمدين على أنفسهم ، قادرين على تخطيط وتنفيذ برامجهم غير الرسمية للتعليم المستمر والنمو المهنى .

ولقد قمنا بتوضيح كيف يمكن لمعلم الرياضيات أو للطالب الذى يتم إعداده ليكون مُعلماً ، أن يقوم بتنفيذ العديد من أنشطة التعليم والتعلم .

ويشمل الكتاب مادة علمية لمقرر فصلين عن تعليم وتعلم الرياضيات فى المدرسة الثانوية . وكما سبق أن ذكرنا فإن هذا الكتاب قد تم تأليفه لمساعدة المعلمين العاملين والمعلمين فى دور الإعداد على تحسين كفاءتهم التدريسية هذا إلى جانب أنه يمكن أن يُستخدم كأساس لمقرر فى الدراسات العُليا فى مجال إعداد معلم الرياضيات .

يُعد كل فصل فى هذا الكتاب وحدة قائمة بذاتها إلى حدٍ ما ويمكن وضع برنامج مختصر لإعداد مُعلم حول أى من فصول هذا الكتاب . فمثلاً يمكن إعداد ورشة دراسية لمدة اسبوعين عن تطبيق نظريات التعلم فى تدريس الرياضيات كما وردت بالفصل الثالث . كذلك فإن الفصول الرابع والخامس والسادس يمكن أن تكون أساساً لمقرر فصل دراسى واحد لهؤلاء الذين يتم إعدادهم ليصبحوا معلمين للرياضيات وأما الفصول الأول والثانى والثالث والسابع والثامن والتاسع فيمكن أن تكون أساساً لمقرر فصل دراسى آخر فى مرحلة البكالوريوس وهناك بعض الأجزاء فى الكتاب تصلح كأساس لدراسة متعمقة لمقرر الفصل الدراسى الواحد لطلبة الدراسات العليا . ويمكن لأى محاضر بالجامعة أو أى منسق لمناهج الرياضيات المدرسية أن يستخدم الموضوعات التى تلائمه من الكتاب بما يتمشى مع مقررات المرحلة التى يدرسها .

فريدريك هـ . بل

الفصل الأول ..

مقدمة فى تدريس الرياضيات

- **أهداف إعداد معلم الرياضيات**
  - المحتوى الرياضى .
  - تطبيقات الرياضيات .
  - إستخدامات الكمبيوتر فى تدريس الرياضيات .
  - منهج الرياضيات الحديثة .
  - نظريات التعلم .
  - نماذج لتدريس الرياضيات .
  - إدارة بيئة للتعلم .
  - النمو الشخصى والمهنى .
- **إكتساب كفايات تدريس الرياضيات .**
  - الإعداد قبل الخدمة .
  - الإعداد أثناء الخدمة .
- **نماذج لإعداد المعلمين .**
  - الإعداد القائم على الخبرة .
  - الإعداد القائم على الكفاية .
- **تمارين وأنشطة**

1

مقدمة فى تدريس الرياضيات

An Introduction To Mathematics Education

إن التعليم والتعلم عمليتان متداخلتان تداخلا معقداً للغايه ، ولم يتم تحديدهما بدقة ويبدو أن الإعداد الفعال للمعلم وأن البرنامج التدريبى لأى حرفة أو مهنة يجب أن يؤسس على مجموعة من الإجابات على الأسئلة التالية : مالذى يجب أن يعرفة شخص ماويكون قادراً على أدائة لكى يمارس مهنته بفاعلية ؟ مامحكات تقويم مستوى نجاح فرد فى مهنته ؟ مامقومات برنامج ناجح لإعداد الأفراد للمهنه ؟

ولسوء الحظ لاتوجد إجابات كافية على كل من هذه الأسئلة الثلاث بالنسبة لمهنة التعليم . فنحن لانعرف بالضبط أية معلومات ومهارات تعتبر ضرورية لضمان نجاح المعلم . ذلك لأنه من الصعب جداً وضع قائمة لجميع محكات تقويم فاعلية المعلم أو حتى الموافقة على مدى مناسبة هذه المحكات التى حددت . وبالتالى فإنهلايوجد نموذج ما لإعداد المعلم يمكن النظر إليه على أنه أفضل من النماذج الأخرى بحيث يضمن إعداداً لمعلمين ممتازين .

وهناك أسباب متعدده لهذا الوضع المتدنى لاعداد المعلم .

أولا : هناك متغيرات كثيرة جداً متضمنه فى كل من التعليم والتعلم ، وهذه المتغيرات تتفاعل مع بعضها البعض بطرق معقده بحيث لو تعرفنا على مجموعات من متغيرات التعليم والتعلم فإنه لايكون من الممكن أن نحدد كيف تؤثر فى بعضها البعض .

ثانيا : هناك مواقف تعليم وتعلم مختلفة – داخل وخارج حجرة الدراسة – بحيث حتى لو كان بالإمكان التعرف عليها جميعا فإن تحديد إجراءات للتعامل مع كل موقف لايعد شيئا عمليا .

ثالثا : إن التباين بين البشر كبير للغايه ، وكل فرد متمايز بحيث إن إستراتيجيات التعليم والتعلم المثلى تبدو مختلفة لكل معلم وكل طالب فى كل بيئة تعلمية .

رابعا : إن علم القياس والتقويم للإنسان لايزال فى حالته البدائية وبالرغم من أن إختبارات ومقاييس جيده قد تم وضعها - بدرجة مقبولة من الثبات والصدق - لتقويم تعلم المعلومات والمهارات ، إلا أنه من الصعب تصميم إختبارات لتقييم مستويات عليا من العمليات العقلية مثل تكوين المفهوم ، والقدرة على تقويم البيانات . واكثر صعوبة من ذلك تصميم مقاييس جيدة لتقييم التغير فى الإتجاهات ، والإدراك ، والشعور ، والإنفعالات التى تعتبر أيضا أهدافا هامة للتعليم والتعلم .

إن تعقد التعليم والتعلم ، والتباين بين المعلمين والطلاب يوضح أن التعليم والتعلم ، وتعلم كيفية التعليم تعتبر أنشطة متفردة وفردية . ولتفادى الإحباط ونتحرر من الوهم فإنه من المهم أن ندرك أنه لايوجد برنامج إعداد معلم ، أو معلم ، أو كتاب يمكن أن يعلم كيف تعلم أو تكون معلما ممتازا . إن مايمكن أن يقوم به برنامج إعداد أو معلم ، أو كتاب هو مساعدتك لتصبح معلم رياضيات ذا فاعلية إذا كنت تعد الآن لهذه المهنة . وإذا كنت بالفعل معلم للرياضيات فإن هذه المصادر يمكن أن تساعدك فى تحسين فاعليتك فى التدريس . وعلى أية الأحوال فلكى تصبح أكثر من مجرد معلم كفء فيجب أن تأخذ على عاتقك مسئولية نموك المهنى . يجب أن تكون لديك الرغبة فى محاولة إستخدام إستراتيجيات تعليم مختلفة مع طلاب مختلفين ، وتقوّم فاعلية إستراتيجياتك بأسلوب ناقد ، وتعدل أو تستبعد الإجراءات غير الفعالة ويتساوى مع ذلك فى الأهمية أن كل معلم يواصل نموه المهنى من خلال الالتحاق بدراسات تجديدية فى الجامعات ، وبرامج التدريب أثناء الخدمة ، والأنشطة داخل الجمعيات المهنية ، وقراءة الكتابات فى تدريس الرياضيات . وحتى من يتخرج من برنامج لاعداد المعلم كمعلم ممتاز سرعان ما يصبح عاديا أو سيئا إذا ما اقتصر على تطبيق ما قد تعلمه مسبقا . وخلاصة القول إن التعليم نشاط غير معرف بدقة ومهنة صعبة جداً وكثيرة المطالب ، إنه يتطلب برنامج مستمر للتحسين الذاتى ، والنمو المهنى إذا ما أريدله أن يمارس بفاعلية .

أهداف إعداد معلم الرياضيات

إن أحد الإستراتيجيات التى عادة ماترتبط بتعليم ذى فاعلية هو أن تضع بوضوح الغايات والأهداف وتشارك فيها المتعلم قبل أن يبدأ دراسة المقرر أو الوحدة . إن غايات هذا الكتاب عن تعليم وتعلم الرياضيات هى :

(١) مساعدة الأفراد الذين يُعدون لكى يصبحوا معلمين للرياضيات على تعلم وممارسة المعلومات ، والمهارات والأنشطة التى وجدها عديد من المعلمين ذات فاعلية نسبيه فى مساعدة الطلاب لتعلم الرياضيات والإستمتاع بها .

(٢) مساعدة المعلمين الحاليين للرياضيات لكى يصبحوا معلمين أفضل . وبالرغم من أن هذه الغايات قد تكون مقبولة لمعظم الأفراد ومناسبه لمرجع فى تعليم الرياضيات إلا أنها قد صيغت بشكل عام جداً . ومن أجل أن يراعى المؤلف الذى يكتب كتابا هذه الغايات ، ومن أجل أن يقوّم الأفراد

الذين يستخدمون هذا الكتاب مدى نجاحه فى تحقيق غايات تدريس الرياضيات فإنه من الضرورى وضع هذه الغايات العامة بصورة محددة وبتفصيل اكثر ، وذلك بأخذ أهداف مخصوصة لبرامج تدريس الرياضيات فى الإعتبار وهناك عدة طرق لتحديد الأهداف أحد هذه الطرق هو إختيار مجموعة مثالية من الأهداف تخص أفراداً معينين ، وهذه قد تكون جيدة ولكن قد تكون غير عملية لتحقيقها فى نظام تربوى أقل مثالية . وطريقه ثانية قد تكون إختيار قائمة « مضمونة » من الأهداف التى ربما تكون مقبولة بالنسبة لكل فرد ولكنها قد لاترمى إلى الإمتياز وعليه فإن هناك طريقة وسطا لإختيار أهداف مثالية وترمى إلى الإمتياز ، ولها فرصة لكى تتحقق ، وسوف تكون مقبولة لمعظم الرياضيين التربويين – وهذا هو المدخل الذى إستخدم فى تحديد أهداف هذا الكتاب . ولما كانت الغاية العامة من الكتاب هو تحسين تعليم الرياضيات ، فإن هذه الأهداف قد أختيرت لتعكس تلك الأمور التى يجب أن يعرفها المعلمون ، وتلك الأمور التى يستطيع المعلمون أداءها . لقد أشتقت الأهداف من مصادر متعدده هى (١) خبرة المؤلف فى إدارة برامج إعداد المعلم ، (٢) التوصيات التى وضعت لمحتوى قدر تدريب معلمى الرياضيات والتى أعدتها اللجنة للبرنامج الجامعى فى الرياضيات .

(٣) الخطوط الإرشادية ومستويات إعداد معلمى المرحلة الثانوية للعلوم والرياضيات .

(٤) الخطوط الإرشادية لإعداد معلمى الرياضيات التى أعدتها لجنة إعداد المعلم قبل الخدمة التابعة للمجلس القومى لمعلمى الرياضيات .

(٥) توصيات هيئة مؤتمر لجنة العلوم الرياضية عن تعليم الحاسب الآلى ، وذلك بالنسبة لوضع الحاسبات الآلية فى المدرسة الثانوية .

(٦) تقرير مؤتمر عن منهج للرياضيات للصفوف من الحضانة الى الصف الثانى عشر الذى يعقد فى مدينة سنوماس بكلورادو .

(٧) تقرير مؤتمر كامبردج عن الرياضيات المدرسية .

إن هذه الأهداف ليست فقط أهداف هذا الكتاب ، ولكنها تمثل بصفة عامة أهداف تدريس الرياضيات بأسرها كما تعكسها التقارير التى أشرنا اليها سابقا النظر إلى مجموعة من الأهداف التالية كدنيل لتلك الأمور التى يجب أن يعرفها معلم رياضيات المرحلة الثانوية ويستطيع أداءها . ويدرك المسئولون عن وضع هذه الأهداف أن أحداً من معلمى الرياضيات المبتدئين لن يعرف فى كل هذه البيانات المقترحة فى الأهداف ولا يستطيع أداء كل شيء تحدده هذه الأهداف . ويتوقع معلم الرياضيات الدؤوب الذكى أن يحقق معظم هذه الأهداف بمستوى مرتفع من الكفاءة وذلك من خلال برنامج جامعى جيد لإعداد معلم الرياضيات ، ومن خلال خبرة تدريسية واعية لمدة خمس إلى عشر سنوات .

المحتوى الرياضى

بالرغم من حقيقة أن هناك أفراد كثيرون لديهم معلومات ممتازة فى الرياضيات غير أنهم ليسوا معلمين جيدين للرياضيات ، فهناك قليل من المعلمين الجيدين للرياضيات لايعرفون رياضيات ومن بين الخصائص العديدة لمعلم الرياضيات الجيد ، مطلب أولى هو اكتسابه لمعلومات قوية وفهم متعمق للرياضيات إن كل معلم يجب أن يعرف ويفهم الرياضيات المتضمنه فى الكتب المدرسية المستخدمة عادة فى مقررات الرياضيات للمرحلة الثانوية . ولكن المعلم الجيد لابد وأن يعرف محتوى أكثر مما هو موجود فى المقررات المدرسية . إن المعلم الذى لدية شمول وعمق فى فهمه للرياضيات الجامعية سوف يعد بطريقة أفضل ليدرس رياضيات المدرسة الثانوية بأسلوب أكثر دقة ، وإثارة ، ويكون أكثر فائدة لكل طالب .

ويتفق معظم الرياضيين ، ومن يعدون معلم الرياضيات على أن معلمى رياضيات المرحلة الثانوية يجب أن يكون لديهم فهم عميق لتركيب نظام الأعداد الحقيقية ، والجبر المجرد ، والجبر الخطى وحساب المثلثات الحديث ، والهندسة الحديثة ، والاحتمالات والإحصاء ، وحساب التفاضل والتكامل ، والتحليل ، وتركيب الرياضيات وأسسها المنطقية .

وهذا يعنى أن معلم الحلقة الثانية للتعليم الأساسى ، ومعلم المرحلة الثانوية يجب أن يكون قادراً على أن :

أولا : فى مجال الاعداد الحقيقية :

١ – يستخدم ويفسر النظام العدى العشرى .

٢ ــ يجرى ويفسر العمليات الأساسية الأربعة على الأعداد الحقيقية .

٣ – يربط خط الاعداد بمفهوم القياس ، ويفسر المفاهيم الأساسية للكميات المقاسة مثل الطول ، والمساحة ، والسعة ، والوزن ، .... بوحدات النظام المترى وغيره من الانظمة المستخدمة فى بيئته .

٤ – يستخدم ويفسر علاقات التساوى ، وعدم التساوى .

٥ ــ يعرض ويفسر نظام الاعداد الحقيقية الموسع ، ومناقشة ترتيب اللانهائيات والمجموعات غير المنتهية (اللانهائية) .

٦ – يحدد الاعداد الرتبوية والكاردينالية للمجموعات المنتهية وغير المنتهية .

٧ – يوضح أن نظام الأعداد الحقيقية هو حقل تام الترتيب .

ثانيا : فى مجال الجبر المجرد :

١ – ينمى خصائص نظامى الأعداد الحقيقية ، والمركبة .

٢ – يجرى العمليات الجبرية على الصيغ والدوال النسبية .

٣ – يوضح ويعطى أمثله عن دوال كثيرات الحدود وحلقات كثيرات الحدود فوق حقل .

٤ – يعرف ويوضح الزمره ، والحلقة ، ومنطقة الاعداد الصحيحة ، والحقل ، الزمره الجزئية العادية والمثلى .

٥ –ينمى العمليات التكرارية .

٦ – يحل معادلات ديوفانتين المعينه ، وإستخدام خوارزميه أقليدس ، والتعامل مع نظم المقياس فى الحساب

٧ – يشتق الاعداد المركبة كصفوف بواقى لكثيرات حدود مقياس (س^{٢} + ١) $[x^2 + 1]$

٨ – يعرف النظرية الأساسية للجبر .

٩ – يستخدم طرق متعددة لحل كثيرات الحدود .

ثالثاً : فى مجال الجبر الخطى :

١ – يعرف فراغات المتجة ويعطى أمثلة عنها .

٢ – يجرى عمليات جبر المصفوفة .

٣ – يعرف ويوضح التحويلات والاقترانات الخطية .

٤ – يستخدم المصفوفات لحل نظم المعادلات الخطية .

٥ – يشرح خصائص المصفوفة ، ومصفوفات التحويلات ، وتغيير الأساس .

٦ – يعرف ويتعامل مع الصورة المثلثية للمصفوفات ، والصورة القطرية للمصفوفات المتماثلة ، والفراغات الجزئية اللا متغيرة والصور التربيعية .

٧ – يبرهن ويوضح نظرية كايلى – هاملتن .

٨ – يوضح حاصل الضرب الداخلى ، والتحويلات العمودية .

رابعا : فى مجال حساب المثلثات الحديثة :

١ – ينمى الدوال المثلثية كدوال معرفة على دائرة الوحدة .

٢ – يحل معادلات مثلثية .

٣ – يرسم الدوال المثلثية ومعكوساتها .

٤ – يبرهن قانونا الجيب وجيب التمام .

٥ – يناقش الاحداثيات القطبية .

٦ – يضع الاعداد المركبة فى صور مثلثية .

٧ – يبرهن ويطبق نظرية ديموافر وتطبيقها .

٨ – يعرف ويستخدم الدوال اللوغارتيمية والأسية .

٩ – يطبق حساب المثلثات فى حل مشكلات فيزيائية .

١٠ – يناقش الحركة الدائرية المنتظمة والقياس النصف قطرى للزوايا .

خامسا : فى مجال الهندسة الحديثة :

١ – يظهر فهما جيداً لهندسة أقليدس التركيبية .
٢ – يوضح ويطبق المستوى الكارتيزى وهندسات الفراغ (ثلاثى البعد) للخطوط المستقيمة ، والمستويات ، والدوائر ، والكرات .
٣ – يعرف ويفهم الهندسة التحليلية للقطوع المخروطية .
٤ – يعرف ويوضح الحركة فى الفراغ الإقليدى ، وزمر التحويلات ، والمصفوفات أوالتحويلات الخطية ، والمتجهات ، والإستقلال الخطى .
٥ – يستخدم الدورانات فى المستوى والفراغ .
٦ – يوضح خصائص فراغات المتجه ذات الأبعاد النونية .
٧ – يعرف ويفهم الهندسة الإسقاطية والهندسة الأفينية .
٨ – يعطى أمثلة عن الهندسات اللاإقليدية .

سادساً : فى مجال الإحتمالات والإحصاء :

١ – يقوم بصياغة التعريفات الأساسية لنظرية الإحتمالات لفراغات العينة المنتهية .
٢ – يناقش طرق أخذ العينات من مجتمع منته .
٣ – يوضح الإستقلال والإحتمال الشرطى .
٤ – يوضح المتغيرات العشوائية ويناقش توزيعاتها .
٥ – يعرف منطوق متباينة لشيبيشف ويوضح تطبيقاتها .
٦ – يناقش التوزيعات المشتركة للمتغيرات العشوائية ، والمتغيرات المستقلة .
٧ – يوضح توزيع بواسون Poisson .
٨ – يناقش الفرق بين الإحصاء الوصفى ، والإحصاء الإستنتاجى ، والفرق بين البيانات والإحصاءات .
٩ – يقوم باختبار الفروض وإشتقاق النتائج المناسبة عن المجتمعات بناء على العينات المسحوبة من المجتمعات .
١٠ –يعرف الفرق بين طرق الإحصاء البارامترى ، واللابارامترى ومتى يستخدم كل منهما .
١١ –يناقش العلاقات والإرتباطات .

سابعاً : فى مجال التفاضل والتكامل :

١ – يستخدم طرق التفاضل والتكامل لحل مشكلات تطبيقية .
٢ – يوسع إستخدام عمليات التفاضل على متغير واحد إلى تفاضل على إكثر من متغير .
٣ – يفهم ويطبق نظرية القيمة المتوسطة ، والنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل ونظرية الدالة الضمنية .

٤ – يدرك عمليات النهايات التى ترد فى التفاضل مثل نهايات المتتابعات اللانهائية ، والمتسلسلات اللانهائية ، والتكاملات المعتلة ، وتبادل النهايات ، والتقارب ، والتقارب المنتظم .

٥ – يعرف منطوقاً ويبرهن على نظريات نهايات مجاميع ، وفروق وحواصل جمع وضرب ونواتج قسمة دوال .

٦ – يشتق صور تفاضل وتكامل الدوال الخاصة .

ثامناً : فى مجال التحليل الرياضى :

١ – يحل معادلات تفاضلية بسيطة .

٢ – يوضح مفاهيم المجموعة المفتوحة ، المجموعة المغلقة ، ونقطة النهاية ، والمجموعة المترابطة ، القياس ، والفراغ المترى .

٣ – يفهم المقصود بقابلية الدالة للتكامل الريمالى .

٤ – يعطى أمثلة عن دوال غير قابلة للتكامل الريمالى .

٥ – يوضح عناصر نظرية القياس الحدسى ، وتكامل ليبيه .

٦ – يستخدم الهندسة التفاضلية لمنحنيات الفراغ .

٧ – يعرف ويطبق التفاضل والتكامل متعدد الأبعاد (المتعدد) .

٨ – يستخدم حساب الإستكمال ، وطرق الفروق ، والصور غير المعينة ، ومتسلسله تيلور .

٩ – يستخدم متسلسلة فوريير لحل المشكلات ذات القيمة الحدودية البسيطة .

١٠ – يحل معادلات تكاملية ، ويعرف دالة جرين ، والطرق المتغايرة ، والتكرارية .

١١ – يطبق أساليب التحليل العددى .

تاسعاً : فى مجال تركيب الرياضيات وأصولها :

١ – يعرض مناقشة عامة عن أهمية تاريخ وفلسفة ، وطبيعة الرياضيات والدور الثقافى لها .

٢ – يعطى أمثلة تاريخية محددة عن الأحداث الرياضية ، والرياضيين التى ترتبط بموضوعات محددة فى كل مجال من الرياضيات .

٣ – يناقش العلاقات والطرق المشتركة بين المجالات المتنوعة للرياضيات .

٤ – يوضح تركيب الفروع المتنوعة للرياضيات عن طريق مناقشة نظام المسلمات ، والمفهومات الموحدة فى كل فرع .

٥ – يقدم الصعوبات المنطقية التى أكتشفت فى مختلف فروع الرياضيات ، ويشرح كيف تم حلها جزئيا أو كليا .

٦ – يصف العناصر المشتركة التى وجدت فى نُظم المسلمات .

٧ – يعطى أمثلة عن التناقضات المنطقية التى وجدت فى الرياضيات ، ويوضح كيف تم حلها .

٨ – يفهم ويوضح عناصر جبر المنطق ، والتضمينات المنطقية .

٩ – يناقش كم من الرياضيات يمكن وضعها فى صورة مسلمات باستخدام عناصر نظرية المجموعات .
١٠ – يناقش تطور فروع الرياضيات المتعددة حسب التتابع الزمنى لها .

هناك خاصيتان يجب التأكيد عليهما فى هذه القائمة الطويلة للكفايات الرياضية المتوقعة من المعلمين .

أولًا : إن القائمه ليست بالضرورة كاملة ، فهناك موضوعات رياضية أخرى التى يعتقد بعض الرياضيين والتربويين ضرورة معرفتها لإعداد معلمين ممتازين للرياضيات .

ثانياً : إن معظم معلمى الرياضيات سوف لايتعلمون كل شىء فى قائمة الكفايات فى أربع سنوات جامعية وبرنامج تأهيل المعلم . ولذلك فإن القراءات الذاتية والدراسة هو طريق ممتاز للمعلمين كى يحسنوا مهاراتهم ومعلوماتهم ويصبحوا معلمين أكفاء .

تطبيقات الرياضيات

بالرغم من أن بعض الرياضيين يعتقدون أن المبررات الكافية لدراساتهم وبحوثهم فى الرياضيات يمكن أن توجد داخل مجال الرياضيات نفسها فإن البعض الآخر ومعظم من يستخدم الرياضيات يرون أن القيمة الكبرى للرياضيات تكمن فى تطبيقاتها فى مجالات الدراسات الأخرى ، وفى إسهاماتها لتحسين العالم الفيزيقى . وعلى ذلك فإن المعلم الجيد للرياضيات يجب أن يحفز طلابه من دارسى الرياضيات من خلال مظهرها الجمالى المتأصل فيها ، وإستخداماتها الكثيرة فى المجتمع . إن بعض أهداف هذا الكتاب وأهداف العديدين من المهتمين بإعداد معلم الرياضيات وتتعلق بتطبيقات الرياضيات وبدراسة الموضوعات الأخرى التى ترتبط بالرياضيات . والمعلم الجيد للرياضيات فى الحلقة الثانية من التعليم الأساسى ، والمرحلة الثانوية يجب أن يعد لأن : –

١ – يطبق نظام الأعداد الحقيقية على مشكلات فى النسبة ، والتناسب ، والتغير والقياس ، والتقريب .
٢ – يستخدم تكنيكات الاحصاء والاحتمالات لحل مشكلات تتعلق بالنزعة المركزية ، والتشتت ، والتوقعات ، والتنبؤ ، والعلاقات ، والفروق بين توزيعات القياسات .
٣ – يصيغ أسئلة بحث كفروض قابلة للإختبار علمياً أو إحصائيا ، ويجمع ويحلل بيانات مرتبطة بالفروض .
٤ – يخطط ، ويجرى ، ويسجل المشاهدات ، ويقدم بيانات فى صورة منظمة ، وواضحة ، ومرتبة .
٥ – يحل مشكلات عملية فى الهندسة المستوية والفراغية .

٦ – يستخدم حساب التفاضل والتكامل ، وتكنيكات التحليل فى حل مشكلات فى العلوم الفيزيائية ، والبيولوجية والإجتماعية .
٧ – يكون لدية معلومات بعمق كاف فى علم أو أثنين من العلوم الكمية لحل مشكلات ، وبناء نماذج رياضية فى هذه العلوم .
٨ – يوضح دور الرياضيات فى تطوير الثقافية المعاصرة .
٩ – يناقش دور الرياضيات فى تعريف مشكلة إجتماعية أو تكنولوجية معينة .
١٠ –يستكشف القوة الرياضية الكامنة فى حل مشكلات مرتبطة برخاء البشرية .
١١ –يصف كيف تتفاعل الرياضيات والتكنولوجيا التى ترتبط بها مع التطور فى القوى الإجتماعية ، والسياسية ، والاقتصادية لتؤثر فى التطور الإجتماعى المستقبلى .
١٢ –يُظهر فهماً للطرق ، والعمليات المنطقية ، والنظم الموضحه التى تسم العلوم الطبيعية والرياضية .
١٣ –يقارن بين « الصدق » الرياضى بالأنواع الأخرى « للصدق » التى يتبناها الناس فى المعاملات غير الرياضية .
١٤ –يوضح بأمثلة كيف يمكن إستخدام النماذج الرياضية فى تنظيم المعلومات عن ظاهرة معروفة .
١٥ –يعيِّن العناصر الأساسية لنموذج رياضى ، ويصف فروض النموذج ، ويميز مابين نماذج متنافسة ، ويعين نماذج مناسبة لمشكلات معينة ، ويعدل النموذج ليستوعب بيانات جديدة .

إستخدامات الكمبيوتر فى تدريس الرياضيات

أصبح الكمبيوتر والتكنولوجيا التى ترتبط بالكمبيوتر مساعدين هامين للتعلم فى المرحلة الثانوية وذلك خلال الخمس عشرة سنوات الأخيرة . ويستخدم الكمبيوتر بواسطة المعلمين لتزويد الطلاب بالتدريبات والتمارين ، ولإختبار الطلاب ، ولتخزين وتحليل بيانات عن تقدم تعلم الطلاب ، ولجدولة الأنشطة التعلمية المتنوعة . ويكتب ويستخدم المعلمون والطلاب برامج الكمبيوتر لحل المشكلات الرياضية ، ولنمذجه العمليات العلمية والإجتماعية ولمحاكاه المواقف الفيزيقية المعقدة . ويستخدم الكمبيوتر بطرق متعدده فى كثير من المدارس لجعل التعلم أكثر فاعلية ، وذا معنى ، ومثير للطلاب وتستخدم معامل التعلم القائم على الكمبيوتر لتعطى الطلاب تحكما جوهرياً لتعلمهم ولتوسيع مجال التعلم المدرسى المتمركز حول الأنشطة . وعلى عكس إعتبارات بعض الأشخاص فإن إستخدام الكمبيوتر فى المدارس لايلغى دور الإنسان أو شخصيته فى عملية التعلم . فعندما يسيطر الطالب والمعلم على الكمبيوتر فإنه يكون بمقدورهم بناء مواقف تعليميه تراعى شخصية كل طالب فى عملية التعلم . ويعتقد كثير من الناس أن التكنولوجيا المرتبطة بالكمبيوتر يمكن أن تستخدم لتؤثر على الثورة الإيجابية فى التربية ، والتى أخفقت فى إحداثهاالتكنولوجيات الأخرى للتعلم .

إن جميع المعلمين يجب أن يكون لديهم معرفة بالكمبيوتر بدرجة ما ، وعلى أية الأحوال فإن معلم الرياضيات يجب أن يعطى معلومات جيدة عن الكمبيوتر واستخدامه فى التربية . وهذا لأنه عندما

تبدأ مدرسة ما فى إستخدام الكمبيوتر للزيادة من التعلم ، فإن معلم الرياضيات عاده مايُعْطَى مسئولية المحافظة على الكمبيوتر وإستخدام امكانات التعلم الموجه بالكمبيوتر . وبالتالى فإن كل معلم للرياضيات يجب أن يكون لديه الكفايات التالية المرتبطة بالكمبيوتر : –

١ – يوضح ويبين إستخدامات الكمبيوتر فى المجتمع .

٢ – أن يناقش المكونات المتعددة المطلوبة لإمكانات الكمبيوتر ، ويظهر كيف تتفاعل هذه المكونات .

٣ – أن يكون لديه القدرة لمناقشة إمكانات الكمبيوتر وحدوده .

٤ – أن يدرك امكانات إستخدام الكمبيوتر للأغراض غير الأخلاقية ، ويعرف كيف يحذر من إستخدامات الكمبيوتر التى قد تكون ضارة للمجتمع ، أو قد تدمر حقوق الأفراد وحريتهم .

٥ – توضيح العمليات الفيزيقية ، والمتعلقة بالمفاهيم الخاصة بالكمبيوتر .

٦ – أن يكون لدية ألفه بتاريخ تكنولوجيا الكمبيوتر .

٧ – أن يكون لدية معلومات أساسية بمجالات متعددة لعلم الكمبيوتر مثل تصنيع الأجهزه الثقيلة Hardware ، وتحليل النظم ، ونظرية التشغيل الآلى ، والذكاء الإصطناعى ، والتحليل العددى ، ولغات البرمجة .

٨ – أن يكون قادراً على كتابة برامج الكمبيوتر بلغتين برنامجيتين على الأقل مثل لغة Basic ، ولغة Fortran

٩ – أن يكون قادراً على إستخدام الكمبيوتر فى مواقف تعليمية متعددة .

١٠ – أن يكون قادراً على كتابة خلايا تعليمية للمنهج مرتبطة بالكمبيوتر للتدريب والممارسة ، والإختبارات ، وتحليل البيانات ، والألعاب والمحاكاه ، والنماذج .

١١ – تدريس برامج الكمبيوتر ومساعدة الطلاب فى إستخدام الكمبيوتر فى أغراض مثيرة ونافعة .

١٢ – مساعدة المعلمين الآخرين الذين يتعلمون عن الكمبيوتر ، ويستخدمونه فى تدريسهم .

١٣ – أن يكون لديه القدرة فى تقويم وإختيار الأجهزة الثقيلة ، والمواد التعلمية الحقيقية والمقررات .

١٤ – أن يكون قادراً على عمل تكامل بين إستراتيجيات التعلم المرتبط بالكمبيوتر ، والأساليب الأخرى للتعليم لتكوين بيئة تعلم كليه فعالة .

١٥ – أن يكون قادراً على وضع وتدريس المعلومات الأولية عن الكمبيوتر ، ومقررات برامج الكمبيوتر .

١٦ – أن يكون لدية ألفه بعديد من المهن المرتبطة بالكمبيوتر والمتاحة للطلاب ، ويكون قادراً على إسداء النصح للطلاب فى إختيارهم لإحدى هذه المهن .

١٧ – إستخدام الكمبيوتر لإشراك الطلاب فى العديد من أنشطة حل المشكلات ، ولمساعدتهم فى تحليل طبيعة التعلم الخاص بهم .

منهج الرياضيات الحديثة

هناك جدل إلى حدما حول فاعلية ما يطلق عليه منهج الرياضيات الحديثة ، وعلى ذلك فإنه يجب على كل معلم للرياضيات أن يلم بالفروق بين منهج الرياضيات (التقليدى) ومنهج الرياضيات الحديثة من حيث المحتوى ، والفلسفة ، والتكنيك ، والنتائج ، وكثيراً ماينا شد الطلاب والآباء والإداريين المعلمين لكى يبرروا مايدرسون من محتوى للرياضيات ، والطرق التى يستخدمونها . ويجب أن يكون معلم الرياضيات الجيد قادراً على : -

١ - مقارنة محتوى منهج الرياضيات الحديثة بمحتوى المنهج المستبدل .
٢ - تقويم نواحى القوة وحدود كل من منهج الرياضيات الحديثة ، والرياضيات التقليدية .
٣ - وصف وتقويم القوى والعوامل التى أبرزت منهج الرياضيات الحديثة .
٤ - تحديد وتعريف المشروعات الكبرى للمناهج المطوره للرياضيات ، ومناقشة المنهج الناتج عن كل منها .
٥ - مقارنة طرق التدريس الحديثة بالطرق القديمة ، وتقويم كل واحدة منها .
٦ - معرفة وتقويم الإدعاءات المتعددة لنجاح وفشل مناهج الرياضيات الحديثة .
٧ - أن يوضح للآباء ماهية الرياضيات الحديثة ، ولماذا تدرس فى المدارس .
٨ - تحليل وتقويم الكتب المتنوعة الممكنة للمدارس الثانوية ، وإختيار الكتاب المناسب للطلاب .
٩ - تحديد وتعريف الطرق التى يتم بها تحسين منهج الرياضيات الحالى .
١٠ - أن يوضح للطلاب قيمه وتطبيقات الرياضيات المقرر دراستها .

نظريات التعلم

كما لاحظنا سابقاً فإن المعلومات الرياضية العميقة ضرورية للتعليم الجيد ، ولكن فهم المحتوى ليس كافياً . فالمعلم القدير يجب أن يعرف ويفهم ، ويطبق نظريات متعددة عن كيف يتعلم الأفراد الرياضيات فى تدريسه للرياضيات ، ويقوم نجاح تطبيق كل نظرية من نظريات التعلم . ومن بين الإختصاصات المهنية المناسبة لمعلم الرياضيات مايلى : -

١ - معرفة وفهم نظريات التعلم الرئيسية ، والنمو العقلى مثل نظريات برونر ، وبياجيه ، وبلوم ، وجيلفورد ، وسكنر ، ودينز ، وبوليا ، وجانييه .
٢ - وصف طبيعة النمو الجسمى ، والعقلى ، والإنفعالى للإطفال والراشدين .
٣ - وصف سلوك طلاب المدرسة الثانوية داخل وخارج المدرسة .
٤ - معرفة مؤشرات الأبحاث عن التعلم ، وتطبيق نتائج البحوث فى تدريس الرياضيات .
٥ - تحليل العمليات ، والبنى الأساسية فى تعلم الرياضيات والطرق التركيبية لموائمه طرق تعلم الطالب الفرد .

٦ – تخطيط خبرات التعليم والتعلم لتكوين بيئات تعلم مناسبة للإرتقاء بالتساؤلات ، والإستكشاف ، وحل المشكلات ، وتعلم كيفية التعلم .

٧ – إختيار وإعداد طرق ، ومواد تعليمية تقوم على أساس معرفة مهنية للتعلم مناسبة لمواقف تعليمية معينة .

٨ – تقويم إجراءات ، ومواد المنهج المستخدم لتدريس الرياضيات .

٩ – معرفة وملاحظة مراحل النمو العقلى والجسمى للطلاب وما يتعلق باتجاهاتهم .

١٠ – تشخيص المعوقات الشائعة للتعلم ، ومعرفة أى الطرق تكون متاحة للمساعده فى إزالة هذه المعوقات .

١١ – إدراك المشكلات المتعلقة بالنمو والسلوك التى تتطلب مساعده خاصة ، ومعرفة المساعدة المتاحة وكيف يمكن الحصول عليها .

١٢ – قراءة وتقويم وتطبيق الدراسات والبحوث فى مجال تربويات الرياضيات المرتبطة بتحسين تعليم الرياضيات وتعلمها .

١٣ – معرفة وتطبيق النظريات الرئيسية للدافعيه لمساعدة الطلاب ذوى الخلفيات الإجتماعية ، والإقتصادية ، والعرقية المختلفة للإستمتاع بتعلم الرياضيات .

١٤ – معرفة الفلسفات التى وضعها رجال التربية أمثال كارل روجرز ، وأريك أريكسون ، وجون ديوى ، وإنماء فلسفه شخصيته لتربويات الرياضيات .

نماذج لتدريس الرياضيات

إن معظم المعلمين الجيدين لديهم معرفة بالعديد من إستراتيجيات التعليم والتعلم ، ويختارون الإستراتيجيات ذات الفاعلية بناء على خصائص الطلاب فى فصولهم . وتوضح البحوث أنه لاتوجد طريقة مثلى للتدريس فالإستخدام لأى نموذج للتدريس يمكن أن يصبح غير فعال نتيجة عدم مناسبتة لمواقف تعلمية معينة أو لنوع خاص من الطلاب ومن بين الكفايات التعليمية التى يجب أن تنمى لدى المعلمين مايلى : –

١ – معرفة وفهم عناصر نماذج التعليم / التعلم مثل التدريس بالعرض الإلقائى المباشر وإستخدام النشاط الجماعى والتعلم الفردى ، ومداخل الإكتشاف والإستقصاء والتعلم الحلزونى وإستراتيجيات حل المشكلات وتعلم المفاهيم ، وإستخدام منظم الخبره المتقدم ، ومعامل الرياضيات ، والألعاب ، والتعلم بمعاونة الكمبيوتى .

٢ – إنتقاء نماذج مناسبة لتدريس الحقائق أو المهارات أو المبادىء أو المفاهيم الرياضية .

٣ – إختيار نماذج مناسبة لكل من الأنشطة العقلية التالية : تعلم الحقائق ، وفهم المعلومات وتنمية المهارات المتعلقة بالأعمال الحسابية وتطبيق المعارف ، وتحليل أو تركيب البيانات والمعلومات وتقويمها .

٤ – إعداد إستراتيجيات تدريس تسمح للطلاب بالتعلم عن طريق السمع ، والبصر ، والآداء العملى .
٥ – تخطيط أنشطة للطلاب بحيث تسمح لهم بإبتكار أشياء ، وتشغيل أدوات ومواد تعليمية وحصول الطلاب على الاعتراف بهم وشعورهم بالرضا والفخر والإنجاز فيما يقومون به من أعمال .
٦ – تخطيط دروس يمكن عن طريقها تقدير وتقويم الاستعداد القياسى للطلاب ولأنشطتهم العقليه والمتعلقة باتجاهاتهم ولإستخدام العديد من الطرق والمواد التعليمية التى تخدم أهداف تعلم الطالب ، وكذلك وضع استراتيجيات للتقويم العام البعدى ، وتقويم فاعلية الدروس .
٧ – تقويم التحصيل الفردى للطلاب ، وتوصيف الأعمال العلاجية والإثرائية المناسبة لكل فرد فى ضوء نتائج التقويم .
٨ – إستخدام أساليب التسجيلات السمعية والتليفزيونية ، والتدريس المصغر ، وتحليل التفاعل ، وتعليقات التلاميذ ، ونجاحات الطلاب ، وتقويم المشرف ، والتقويم الذاتى لتحليل وتحسين عمل الشخص كمعلم .
٩ – تقويم برنامج الرياضيات برمته بدءا من الغايات والأهداف وذلك خلال خطوات التنفيذ من أجل عملية التقويم الشاملة .
١٠ – إختيار تعيينات للواجبات المنزلية تكون مثيرة ومناسبة لكل طالب .

إدارة بيئة للتعلم

إن معظم كفايات التدريس المذكورة سابقاً تتصل بصفة عامه بتوفير وإدارة بيئة تعلم مناسبة ، وعلى أية الأحوال هناك عدد من الكفايات الخاصة التى يحتاجها المعلم لإدارة فعالة لحجرة الدراسة وهى : –

١ – القدرة على إنتقاء رؤوس موضوعات مناسبة فى الرياضيات حسب إختلاف مستويات قدرات الطلاب ، وحسب مستويات الصفوف الدراسية .
٢ – القدرة على تخطيط دروس ووحدات بل ومقررات الرياضيات كاملة .
٣ – معرفة طرق لخلق حجرة دراسة جذابة ومثيرة باستخدام الملصقات ومجلات حائط ونماذج وأمثلة لأعمال وانتاج الطلاب الجاهزة .
٤ – القدرة على الحصول على مصادر التعلم والتى تنتج وتوزع تجاريا مثل الكتب والمجلات ، والافلام ، والنماذج ، والألعاب ، والأشرطة السمعية وإستخدامها وتقويمها .
٥ – إستخدام المجتمع المحلى كمصدر للتعليم والتعلم .
٦ – مساعدة الطلاب لتنمية الثقة بالنفس ، وتحمل مسئولية تعلمهم الشخصى .

٧ – القدرة على إلقاء أسئلة جيدة ، والانصات لإستجابات الطلاب ، وتشجيعهم لمناقشة الرياضيات مع بعضهم البعض .

٨ – إقامة علاقة مع تلاميذه من مختلف الأعمار والأجناس والخلفيات العرقية والاصول الجغرافية وفهمهم والإتصال بهم .

٩ – الوعى بالتأثيرات السلبية التى تأتى من خارج المدرسة على الطلاب والتعويض عن هذه التأثيرات فى التدريس .

١٠ – القدرة على التعامل الفردى مع مشكلات الطلاب الإنضباطية بأسلوب يتسم بالتعاطف والمعالجة التربوية المتخصصة مهنيا .

١١ – وضع طرق تقويم عادلة ومنصفة وبعيدة عن الذاتية .

النمو الشخصى والمهنى

هناك مئات من الخصائص الشخصية والمهنية التى عادة ما يتحلى بها معلمو الرياضيات القديرون والتى أشرنا إلى الكثير منها . إن كل معلم يجب أن يكون على وعى بأن الإعداد التربوى والمهنى لتدريس الرياضيات – عادة ما يكون أربع أو خمس سنوات جامعية – هو سعى متصل طوال الحياة فأى معلم يرى أن البرنامج الإجبارى للحصول على درجة جامعية أو شهادة تدريسيه تعتبر إعداداً كافياً أو نهائياً سوف يصبح خلال سنوات قليلة معلماً ضعيف أو على أحسن تقدير معلما متوسطا . وتحتوى القائمة التالية على أنشطة يجب أن يشارك فيها كل معلم رياضيات لكى يحافظ على قدرته المهنية والشخصية ويحسنها من أجل إثارة دافعية الطلاب وتدريسهم موضوعات مشوقة ومفيدة فى الرياضيات .

١ – إسأل أسئلة ترتبط بالرياضيات وتدريسها ، وإنصت وتقبل وإستجب لأسئلة وأفكار الطلاب والزملاء والأفراد العاديين .

٢ – إستمر فى دراسة الرياضيات وتدريسها من خلال مقررات الكلية ، وبرامج التدريب أثناء الخدمة ومن خلال القراءة الحرة .

٣ – إشترك فى الجمعيات والرابطة التربوية الخاصة بالرياضيات وبالأنشطة التربوية والتعليمية بصفة عامة مثل رابطة مدرسى الرياضيات ، ورابطة خريجى معاهد التربية ونقابة المعلمين والجمعيات العلمية والثقافية المحلية .

٤ – قم بدور فعال فى الجمعيات العلمية المعنية بتحسين ظروف تعليم وتعلم الرياضيات فى المدارس ، والمجتمعات المحلية .

٥ – لاحظ المعلمين الآخرين للرياضيات ، وكذلك للمواد الأخرى ، وإقتبس وعدّل طرقهم الناجحة فى التدريس داخل فصلك .

٦ – قم بتصميم وتنفيذ مشروعات بحثية صغيرة لإعداد وتقويم طرق وبرامج جديدة .

٧ - شارك بأحسن أفكارك وتكنيكاتك مع المعلمين الآخرين من خلال الأحاديث فى الإجتماعات المهنية ، والمقالات فى الصحف والمجلات المهنية .
٨ - ساعد فى النمو المهنى قبل وأثناء الخدمة للمعلمين الآخرين .
٩ - كن نشطا فى شئون المجتمع المحلى ، واهتم بالبيئة الكلية لطلابك .
١٠ - إعمل مع الآباء فردياً أو جماعيا كى تتعلم أكثر عن كل طالب حتى تحسن طرائق تدريسك فرديا مع كل طالب .
١١ - أستعن بمدير المدرسة وبالإداريين المعاونين لمساعدتك كى تصبح معلم رياضيات أفضل .
١٢ - استخدم تكنيكات مناسبة لتعديل وتقويم فلسفتك للتعليم والتعلم .
١٣ - كن على وعى بالقرارات التى تتخذ على المستوى القومى ، ومستوى الإدارة والمستوى المحلى التى قد تؤثر على تدريس الرياضيات العامة والتدريس داخل حجرة الدراسة بصفه خاصة .
١٤ - قم بتخطيط وتنفيذ الأنشطة لتؤثر على المشرعين والإداريين فى إتخاذ القرارات التى تؤثر على تدريس الرياضيات .
١٥ - كن على وعى بالمؤسسات المحلية ، والمصادر التى قد تساعدك واستخدمها كى تتعامل بفاعلية أكثر مع طلابك .
١٦ - إعرف حقوق ومسئوليات المعلمين والطلاب ، ومختلف القوانين واللوائح فيما يتعلق بالمدارس ، والآباء والمعلمين والطلاب .
١٧ - قوِّم أنشطة مهنتك بناء على نتائجها بالنسبة لك ولطلابك .
١٨ - أشترك فى الأنشطة الإضافية للمناهج المدرسية .
١٩ - أشترك فى أنشطة تطوير وتقويم المناهج .
٢٠ - أحتفظ بسجلات أنشطتك المهنية العديدة ، وشارك الزملاء والإداريين فيها كوسيلة للتقويم الذاتى وتقويم الزملاء .

إكتساب كفايات تدريس الرياضيات

الإعداد قبل الخدمة*

بالرغم من أن هناك العديد من الطرق للوصول إلى الكفايات الضرورية لإعداد معلم الرياضيات للمرحلة الثانوية إلا أن معظم المعلمين قد أصبحوا حملة شهادات من خلال برنامج درجة جامعية فى أربع سنوات . وتجاز هذه الدرجة من مجلس الكلية ثم مجلس الجامعة . وكثير من الكليات الجامعية لها بدائل لبرامج إعداد المعلم وذلك للأفراد الذين حصلوا على بكالوريوس فى الرياضيات ويرغبون فى إستكمال المتطلبات اللازمة ليصبحوا معلمين للرياضيات . ومعظم الشهادات التى تمنح لمعلم

*تم تعديل النص بما يتفق مع الواقع المصرى العربى .

الرياضيات تسمح له بتدريس الرياضيات فى الحلقة الثانية من التعليم الأساسى والمرحلة الثانوية . وبينما تختلف محتويات المقرارت فى كليات إعداد المعلمين من جامعة إلى أخرى إلا أنها تشترك جميعا فى معظم متطلبات التخرج كالحصول على تقديرات بمستوى معين ، وإظهار الكفايات التدريسية أثناء التدريب العملى بالمدارس تحت إشراف متخصص فى المادة أو عضو هيئة تدريس من كليات التربية .

وقد يتوقع الفرد أن معلم المستقبل للرياضيات يكون حاذقا فى محتوى الرياضيات بدراسة لمقررات جامعية فى الجبر والهندسة ، والتفاضل والهندسة التحليلية ، والإحتمالات والإحصاء ، والجبر المجرد والخطى ، والهندسة الإقليدية واللاإقيلدية ، وتركيب الأنظمة الرياضية ، والرياضيات التطبيقية ، وقد تتضمن المقررات أيضا نظرية الأعداد ، والتوبولوجى ، والمعادلات التفاضلية ، والتحليل الرياضى .

وبينما تُعلم بعض تطبيقات الرياضيات من خلال الرياضيات ، وطرق تدريسها نجد أن البعض الآخر يُدرس فى الفيزياء والكيمياء ، ومقررات أخرى فى العلوم .

كما يُدرس فى كليات التربية مقررات تربوية مثل علم النفس التربوى ، وتكنولوجيا التعليم ، وتاريخ وفلسفة التربية ، والإدارة المدرسية ، وطرق القياس والتقويم التربوى ، وطرق البحث التربوى ، والمناهج وطرق التدريس ، والتربية المقارنة . وعادة مايدرس طالب الرياضيات مقررين فى طرق تدريس الرياضيات ويتضمن هذان المقرران موضوعات فى مناهج الرياضيات الحديثة ، وتطبيقات نظريات التعلم فى تعليم الرياضيات ، ونماذج لتدريس الرياضيات ، وبعض المشروعات المحلية والعالمية للرياضيات المدرسية ، والاتجاهات الحديثة فى تدريس الرياضيات . ويتدرب طالب الصف الثالث على التدريس بواقع يوم أسبوعياً طوال العام الدارسى فى مدارس الحلقة الثانية من التعليم الأساسى ، أما طالب الصف الرابع فيتدرب على التدريس بواقع يوم أسبوعيا خلال النصف الأول من العام الدارسى وجزء من النصف الثانى بالإضافة إلى أسبوعين متصلين للتدريب فى النصف الثانى من العام الدراسى ويكون هذا تحت إشراف متخصصين فى الرياضيات بالوزارة أو عضو هيئة تدريس من كليات التربية من المتخصصين فى الرياضيات أو طرق تدريسها .

الإعداد أثناء الخدمة *

يأخذ الإعداد أثناء الخدمة عدة أشكال منها الدورات التدريبية القصيرة المركزة وتستمر أسبوعين أو ثلاثة وتعتبر بمثابة دورات منشطة للمعلمين حيث يدرسون فيها بعض الإتجاهات الحديثة فى التدريس. وأهم ماإستجد من موضوعات فى المقررات الحالية للرياضيات وكيفية تدريس هذه الموضوعات ومنها الدورات التدريبية الطويلة والتى تعتبر كبعثات داخلية للمعلمين أو الموجهين

* حدث تعديل فى النص بما يتفق مع الواقع المصرى والعربى .

وتستمر بضعة شهور وقد تمتد إلى عام . ويدرس فيها المتدربون الموضوعات السابقة بتوسع بالإضافة إلى مقررات فى الرياضيات الجامعية المتقدمة ، وبعض المشروعات العالمية للرياضيات ، وكيفية تصميم وتطوير مناهج الرياضيات بمراحل التعليم العام والتعليم الفنى .

وتنفذ هذه الدورات إما فى فترات مسائية أو خلال العطلة الصيفية ، أويفرغ المتدربون من أعمالهم الأصلية وذلك كما فى حالة البعثات الداخلية أو الدورات التدريبية التى تستغرق شهرا أو أكثر .

نماذج لإعداد المعلمين *

كان معظم معلمى رياضيات المرحلة الثانوية قبل عام ١٩٧٠ يعدون للتدريس من خلال ما أصبح يطلق عليه بنموذج إعداد المعلم القائم على الخبرة ومنذ عام ١٩٧٠ وضع عدد من المعلمين ورجال التربية نموذج إعداد المعلم القائم على الكفاية وقاموا بتنفيذه ، وتقويمه والارتقاء به . وفى عام ١٩٧٥ كان معظم المعلمين مازالوا يعدون للتدريس من خلال نموذج الإعداد القائم على الخبرة ، وبعد عام ١٩٧٥ كانت البرامج الجديدة لإعداد المعلم التى تمت الموافقة عليها هى البرامج القائمة على الكفاية وفى منتصف السبعينات قدمت أعداد متزايدة من الكليات برامج اعداد المعلم القائمة على الكفاية ، وذلك بالرغم من أن معظم المعلمين كانوا لايزالون يعدون للتدريس ببرامج قائمة على الخبرة . وفى منتصف الثمانينات سوف يكون عدد كاف من المعلمين قد أعد ببرامج إعداد المعلم القائمة على الخبرة وسوف يقومون بالتدريس فى المدارس ومن ثم يمكن تقويم أثر هذه البرامج . وفى هذا الوقت ليس من المؤكد أن برامج إعداد المعلم القائم على الكفاية سوف تلاقى قبولًا كبيراً فى النظام التعليمى ، وعلى أيه الأحوال فقد أصبح من السائد بعد ١٩٨٠ أن الأفراد الذين يلتحقون بالجامعة لإعدادهم لمهنة التدريس سوف يعدون ببرنامج قائم على الكفاية .

ومن ناحية أخرى فإن بعض المدارس الثانوية (معظمها كان لديه برامج قائمة على الخبرة قبل عام ١٩٧٥) قد غيرت برامجها إلى برامج إعداد الطالب القائمة على الكفايات . وفى الحقيقة سوف يزداد عدد المدارس الثانوية التى تطبق البرامج القائمة على الكفايات خلال الثمانينات وهناك نماذج أخرى لإعداد الطلاب ، ولإعداد الأفراد لتدريس الطلاب . وعلى أية الأحوال ففى المستقبل الذى يمكن التنبؤ به سوف نرى أن طلاب أغلبية المراحل التعليمية والكليات سوف يتم إعدادها عن طريق إما برامج قائمة على الخبرة ، أو برامج قائمة على الكفاية . وعلى ذلك فمن الأهمية بمكان أن يُلم المعلم الحالى ومعلم المستقبل بمكونات هذين النموذجين فى التعليم .

---

* ينطبق هذا على إعداد المعلم بالولايات المتحدة الأمريكية .

++++ يقصد بالمرحلة الثانوية هنا الصفوف من السابع حتى الثانى عشر وهو مايقابل المرحلتين الأعدادية (٧ - ٩) والثانوية (١٠ - ١٢) .

الإعداد القائم على الخبرة

ماذا يعنى الإعداد القائم على الخبرة ؟ إن البرنامج القائم على الخبرة لإعداد المعلم أو للمدارس ، بصفة عامة ، يقوم على تحديد وإنتقاء خبرات مناسبة للطلاب التى يظهر أنها تحقق الغايات والأهداف لبرنامج الإعداد بالنسبة لأغلبية الطلاب . وأحيانا ينتقى الإداريون والمعلمون غايات وأهداف قد تكون غير مصاغة بشيء من التحديد ، ولكنها متضمنه خلال الكتب الدراسية وأنشطة التعليم التى تمارس داخل حجرة الدراسة . إن التعلم القائم على الخبرة عادة مايكون متمركزا حول المعلم ، ومرجعى التوجية مع نفس الأنشطة والخبرات تقريباً التى تعطى لكل طالب فى الفصل لنفس الفترة الزمنية . وعادة ما يقوِّم الطلاب من خلال أنشطة مثل الاختبارات ، والتعيينات التى تعطى لكل الفصل فى نفس الوقت ، ويتوقع من كل فرد أن يتم هذه الأنشطة فى نفس الزمن تقريباً . ويميل التقويم إلى كونه معيارى المرجع ، ويعنى أن يُقوِّم الطلاب ويعطون تقديرات بناء على مدى إجادتهم بالنسبة لطلاب آخرين . وعادة يجب على الطالب التقدم لدراسة الوحدة التالية من المادة بعد أن يكمل المعلم الوحدة السابقة ، دون الإرتباط بمدى إجادتهم فى أداء الأختبار . ويميل بعض المعلمين بتصميم خبرات التعلم بحيث تكون موجهة للطالب المتوسط ، ويجب على الطالب الأقل مستوى والأعلى مستوى أن يتعلم من خلال نفس الخبرات . وعلى أيه الأحوال يقوم العديد من المعلمين بتصميم خبرات متفاوتة لأفراد الطلاب ، وبرغم هذا فالتدريس لكل وحدة من المادة ينتهى فى نفس الوقت لجميع الطلاب .

نشأ الإعداد (التقليدى) القائم على الخبره – كما هو متبع حاليا – من إجراءات ظهر أنها ذات فاعلية نسبية لتدريس مجموعات متباينة من الطلاب فى مواقع ثابتة ذات مصادر محدودة . ويهيىء هذا النموذج للتدريس إستخداما ممتازاً للمصادر والأمكانات وهو أسلوب ذو فاعلية لمعظم – وليس كل – المعلمين الذين يدرسون فى نظام تعليمى الزامى جماهيرى وعلى الرغم من أن الإعداد القائم على الخبرة لايميل إلى كونه تعليما متمركزاً حول المعلم من التلاميذ فإن يمكن تنفيذه بفاعلية كبيرة بواسطة معلم جيد يراعى الفروق الفردية بين الطلاب ويستخدم إستراتيجيات تعليم وتعلم تم التأكد منها .

الإعداد القائـم على الكفاية

بما أن الإعداد القائم على الخبرة قد أصبح ناجحاً نسبياً (وإن يكن أقل من أن يكون قد بلغ الكمال لإعداد كثير من الأفراد ، فما غرض وجود نموذج بديل قائم على الكفاية للإعداد ؟ وما هو الإعداد القائم على الكفاية ؟ وما هى مردودات البرامج القائمة على الكفايات ؟ إن الإعداد القائم على الكفاية قد تبلور مفهومه لعدة أسباب فالعديد من الطلاب كانوا غير قادرين على مواكبة تعلم المهارات الأساسية فى برامج الإعداد التقليدية ، والبعض الآخر قد كبحته نفس هذه البرامج ، وقد

أدى ذلك إلى حركة تفرد التعليم . ويبدو أنه فى كثير من الفصول وفى مدارس متعددة لم يتعلم الطلاب كثيراً عن أى شيء فيما عدا كراهيتهم للمدارس والمعلمين . إن التكلفة المرتفعة للتعليم ، والوعى المتزايد من الناس عن بعض النتائج المتدنيه للكثيرين من الطلاب قد أدت إلى المطالبة بمحاسبة المعلمين والمدارس كمسئولين عن نجاح وفشل طلابهم فى حجرات الدراسة .

إن المفهوم الجديد لإدارة المدرسه ، والتطورات التكنولوجية الحديثة أتاحت طرقا جديدة ومصادر للتدريس للعاملين بالتعليم فالتقدم الحديث فى فن وعلم التدريس ، والوعى المتزايد للناس بحقوق كل فرد فى الحصول على تعلم جيد (خاص تعليم الزامى جيد) قد أوجد أسبابا إضافية لتجريب نموذج منقح للتعليم ويبدو أن وجود مناهج وطرق تدريس جديدة وحتى بضرورة وجود نظام جديد يتم فيه تنفيذ هذه المستحدثات فى التعليم التى وجدت فى البرامج القائمة على الكفاية كان قد سبق تجريبها فى البرامج القائمة على الخبرة .

وخلاصة القول ، إن برامج التعليم القائم على الكفاية قد نبعت من الحاجة إلى تصحيح العيوب فى التعليم التقليدى ، ومن أهمية الإبقاء على أفضل عناصر النموذج القائم على الخبرة ، ومن رغبة فى تجميع بعض طرق التعليم الجديدة فى عملية واحد ، بالإضافة إلى الدافع البشرى لتجريب شيء مختلف .

إن برامج التعليم القائم على الكفاية قد تطورت من خلال محاولات لوضع أهداف صريحة للتعلم فى تجمعات صغيرة لكى يمكن تقويم نجاح كل طالب فى تحقيق كل هدف من أهداف التعليم من خلال تغيرات يمكن ملاحظتها فى سلوكة وقد يكون هناك تعريفات كثيرة للتعليم القائم على الكفاية بقدر الممارسين لهذا النموذج ، وعلى أية الأحوال فمعظم برامج التعليم القائم على الكفاية تحاول على الأقل المحافظة على فلسفة مشتركة وعلى بعض الإجراءات المشتركة . فعلى سبيل المثال ، يتوقع من الطلاب الإشتراك فى وضع الغايات والأهداف وأن يكونوا مسئولين عن إدارة تعلمهم ويكون للطلاب الإختيار من بين بدائل للطرق والخبرات والمواد التى يستخدمونها فى مقابلة كل هدف من أهداف التعلم . فيتعلم الطلاب كيف يؤدون العمل ويسمح بتفاوت الوقت المخصص لتعلم مهمة معينة من طالب لآخر ويحاول المعلمون التأكيد على أن إجراءات التقويم تكون متفقة مع الأهداف ، ويمكن أن يعطى الطلاب أساليب بديلة لإظهار كفاياتهم لكل هدف . ويأخذ الطلاب إختبارات عندما يكونون مستعدين ويستمرون فى العمل فى كل هدف حتى يصلوا إلى مستوى التمكن . ويقوَّم الطلاب بحسب نجاحهم فى بلوغ مستوى للكفاية يكون محددا مسبقا ومصاغا بوضوح (محكى المستوى) والذى يطلق عليه تقويم محكى المرجع : فالتقويم لايتم بحسب مدى إجادة الطلاب بالنسبة لبعضهم البعض كما هو الحال فى الطريقة معيارية المرجع . فكل طالب ينال تشجيعاً لكى يتنافس مع نفسه ، وليس مع الطلاب الآخرين .

وقد وضع هوستن Houston وهاوسام Howsam فى كتابهما المعنون إعداد المعلم على أساس الكفايات من Competency- Based Teacher Education قائمة بالخصائص التالية التى يجب أن تقدم فى برنامج الإعداد القائم على الكفاية : —

١ - تحديد أهداف المتعلم إجرائيا بصيغ سلوكية .
٢ - توصيف الوسائل لتحديد ما إذا كان الآداء يقابل (يتفق مع) المستويات المعينة للمحك .
٣ - توفير أسلوب أو أكثر للتعليم يكون وثيق الصلة بالأهداف ، ويمكن من خلاله أن تأخذ أنشطة التعلم مكانها .
٤ - مشاركة الجمهور فى وضع الأهداف ، والمحكات ، ووسائل التقويم ، والأنشطة البديلة .
٥ - تقويم خبرات التعلم بدلالة محكات الكفاية .
٦ - وضع المسئولية على المتعلم لمقابلة المحكات .

وتستخدم مفاهيم وإجراءات أخرى - مثل حقائب الخلايا التعليميه ، ومدخل النظم ، وتكنولوجيا التعليم ، والدعم التوجيهى والإدارى - كوسائل فى تنفيذ إلتزامات الأسلوب القائم على الكفاية وهذه المفاهيم المسهمه تتصل بدرجة كبيرة بعملية التفريد .

وتركز البرامج القائمة على الكفاية على أهمية وضع أهداف للتعليم ، وانماء طرق بديلة للطلاب لمقابلة الأهداف ، وابتكار طرق مناسبة لتحديد ماإذا كان الطلاب قد وصلوا إلى التمكن من كل هدف وتحدد البرامج القائمة على الكفاية خمسة صنوف من أهداف التعلم بحسب المعاييز التى سوف تستخدم لتقويم أداء الطلاب .

١ - أهداف معرفية تحدد معارف ، وفهم ومهارات وقدرات عقلية عامة يظهرها الطلاب .
٢ - أهداف وجدانية تحدد إتجاهات ومعتقدات وقيم يُتَوقع أن تنمو لدى. الطلاب .
٣ - أهداف آدائية تتطلب أن يظهر الطلاب قدرة على عمل الأشياء أى ممارسة عملية لبعض الأنشطة ويتوقع من الطلاب تطبيق مهاراتهم ومعارفهم فى اتمام مهمة معينة
٤ - أهداف تالية تتصل بعواقب ونتائج آداء الطلاب والإهتمام هنا يكون بكيفية إستخدام الطلاب لمهاراتهم ومعلوماتهم فى أداء المهام بطريقة لها تأثير مناسب على الآخرين وعلى بيئتهم .
٥ - أهداف إستكشافية وهى أهداف خبرة . وهى تعين أنشطة يجب أن ترتبط وتعمل على الإرتقاء بتعلم له معناه ودلالته ، ولكن لايمكن تحديدها أوقياسها . فزيارة صالة عرض للفن أو متحف تعتبر من الأهداف الإستكشافيه . فيتوقع هناك أن يحدث شيء له قيمة ، ولكن من المستحيل تحديد أو قياس هذا الشيء .

إن معظم البرامج القائمة على الكفاية تقسم المادة المراد تعلمها إلى وحدات صغيرة يطلق عليها خلايا تعليمية . ويحتوى كل منها عادة على الأقل خمسة أجزاء :

١ - الأساس المنطقى ويوضح أهمية الخلية ، ويعطى الأسباب لتعلم المواد المحتواه فى الوحدة .
٢ - أهداف تعلم الخلية التى تسرد تلك الأشياء الواجب تعملها بدلالة محكات مرجعية ، وتعين مستوى التمكن المطلوب .

٣ – التقويم القبلى الذى يحدد طرق قياس إستعداد المتعلم للخلية ومدى تمكنه المسبق لأهداف تعلم الخليه .

٤ – الأنشطة الممكنة التى تحدد المواد البديلة والأنشطة والإجراءات للوفاء بأهداف الخلية .

وبعد أن يحقق المتعلم أهداف خلية ما فإنه يتقدم إلى خلية أخرى وإذا لم يحقق المتعلم الأهداف فإنه يستمر مع أنشطة أضافية مصممه بحيث تساعده على الوصول إلى مستوى التمكن .

لكل من البرامج القائمة على الكفاية ، والبرامج القائمة على الخبرة نقاط قوتها ونقاط ضعفها والمعلم الذكى ، واسع المعرفة ، والمتبصر ، والصبور يكون قادراً على إستخدام ايهما للإرتقاء بالتعلم . والمعلم الذى لدية إهتمام قليل بطلابه وبنموه المهنى سوف يكون بلاشك معلما غير فعال بغض النظر ، عن أى نموذج تعليمى يستخدمه . إن التعليم والتعلم أنشطة شخصية للغاية وهناك قليل من الإجابات الدقيقة ، والمداخل المضمونة لكل منهما . ويجب على كل معلم أن ينمى رصيداً من الإتجاهات ، والسلوكيات التى يمكن استدعاؤها فى المواقف المتنوعة للتعليم والتعلم .

إن هذا الرصيد سوف يكون مختلفا بالنسبة لكل معلم ، وذلك بالرغم من وجود عديد من العناصر المشتركة ، وليس هناك معلم يصبح كفوءا تلقائيا .

إن تعقيد وصعوبة التدريس منصوص عليها بطريقة جيدة فى مقالة عن المسئولية فى التعليم بقلم ويلوبى S. Willoughby والتى نشرت فى مجلة معلم الرياضيات فى نوفمبر عام ١٩٧٢ حيث ورد الآتى : –

إن التربية ، لسوء الحظ ، أكثر صعوبة من المهن الأخرى . فالعقل البشرى بلا شك أكثر الاشياء جدارة بالملاحظة وأكثرها تعقيدا على الأرض ، والعمليات التى يتعلم بواسطتها ، على أحسن الأحوال لم تفهم بدقة وعلاوة على ذلك فإن كثيرا من الناس يعتقد أن رجل التربية هو من يقوم بالعمل التربوى برمته ، ولكن كل فرد يدرك أن الطبيب والمحامى يؤديان جانبا من العمل للمحافظة على صحة الناس وإبعادهم عن المشكلات القانونية . إن من المتوقع أن يعرف كل فرد شيئا عن الصحة والقانون ويسلك بمقتضاها بطريقة معقولة ومنطقية ، ولكن يعتقد كثير من الناس أن التربية هى دائرة إختصاص المدارس إن كلًا من النظرة السليمة والدراسات العلمية يخبرنا بأن المدارس مسئولة فقط عن جزء صغير من التربية ، ولكن لاتزال المدارس يلقى عليها اللوم أو تمتدح بسبب مستوى الأطفال فى المجتمع المحلى كأنها المسئولة الوحيدة عن هذا المستوى . وعلى ذلك بينما تعالج المهن الأخرى الأفراد الذين لديهم حالات ملحه أو طارئه ، نجد أن المعلم مسئول عن الصالح العام لكثير من الأفراد فى نفس الوقت ، ونادراً مايكون لديه الفرصه كى يحاول تشخيص وحل المشكلات لأفراد معينين واحدا بعد الآخر .

تمارين وأنشطة

١ - افحص بعض المراجع عن برامج التعليم القائم على الكفاية واقرأ عن هذا النموذج فى إعداد المعلم وفى تعليم تلاميذ المدارس وكوِّن قائمة بالخصائص المميزة للتعليم القائم على الكفاية والتعليم القائم على الخبرة . قارن نقاط القوة ونقاط الضعف فى كل من هذين النموذجين التدريسيين .

٢ - تخير مجموعة من بين أهداف إعداد المعلم التى وردت فى هذا الفصل وصف بعض الأنشطة المناسبة لتقوم بها طالب فى كلية التربية يعد لكى يكون معلما ليحقق كل من هذه الأهداف كيف يبرهن معلم ما كفاية فى تحقيق كل هدف ؟

٣ - ادرس مقررات الرياضيات التى تقدم فى عدد من كليات التربية وقارن بينها . ابحث مدى مناسبتها للاعداد القائم على الكفاية . ثم ابحث مدى مناسبتها لتحقيق الأهداف الواردة فى هذا الفصل .

٤ - صمم خطة لمجموعة من المقررات والخبرات التى ترى أنها تساعدك فى تحقيق الأهداف التى ترى أنها مهمة لك كمعلم للرياضيات .

الفصل الثانى

إعداد دروس الرياضيات

إختيار وتصنيف الأهداف التربوية .

- الأهداف المعرفية .
- إستخدام الأهداف المعرفية فى الفصل .
- الأهداف الوجدانية .

ـ التخطيط لدروس الرياضيات .

- المحتوى الرياضي .
- أهداف التعليم .
- مصادر التعليم .
- إستراتيجيات التقويم القبلى والبعدى .
- إستراتيجيات التعليم والتعلم .

ـ تمارين وأنشطة .


MATHMATICS

إعداد دروس الرياضيات

Preparing to Teach Mathematics Lessons

من أجل أن تصبح معلما ذا كفاءة وفاعلية فإنه من الضرورى أن تفهم العلاقات بين محتوى الرياضيات التى تدرِّس ، والأهداف المعرفية والوجدانية ، والإستراتيجيات المتنوعة للتعليم والتعلم لتقديم دروس الرياضيات . وما لم يعرف المعلم وكل طالب أهداف الدرس وما نوع آداء الطالب المطلوب لبيان أنه قد تمكن من الدرس ربما يصبح التعليم والتعلم غير ذات كفاية أو فاعلية . وقد تكون طرق تدريس معينة فعالة فى الارتقاء بتعلم بعض موضوعات الرياضيات ، ولكن قد تكون غير فعالة على الإطلاق بالنسبة لموضوعات أخرى . فالطرائق الفنية للعرض حيث يتذكر الطلاب الحقائق ، والرموز ، والمهارات بإستخدام التدريب ، والمران والألعاب يمكن أن تكون إستراتيجية مفيدة لتدريس الحقائق والمهارات ولكن قد لا ينتج عنها تعلم ذو معنى للمفاهيم والمبادىء المركبة .

إختيار وتصنيف الأهداف التربوية

إن هدفنا العام كمعلمين للرياضيات هو مساعدة الطلاب لتعلم حقائق ، ومهارات ، ومفاهيم ، ومبادىء هامة ومفيدة . ومع ذلك عند تدريس كل موضوع فى الرياضيات يجب صياغة أهداف أكثر تحديداً لوصف مخرجات تعلم الطالب المتوقعة . وهناك ثلاثة أنواع من الأهداف التربوية — الأهداف المعرفية ، والأهداف الوجدانية ، وأهداف المهارات الحركية أو المعالجة اليدوية . وتخصص الأهداف المعرفية سلوكيات تشير إلى وظيفة العمليات العقلية المتنوعة والتغيرات فيها . وتخصص الأهداف الوجدانية سلوكيات تشير إلى التغير فى الاتجاهات . وتخصص أهداف المهارات الحركية سلوكيات توضح أن الطلاب قد تعلموا مهارات معالجة يدوية معينة .

إن إثنين من علماء نفس التعلم هما بنيامين بلوم (١٩٦٥) ، ودافيد كراثهول (١٩٦٤) وذلك بمساعدة كثير من علماء النفس ورجال التربية قد وضعوا نظامين لتصنيف الأهداف التربوية أُطلق عليهما أسس التصنيف Taxonomies . وهذان الأساسان للتصنيف عباره عن نظامين هرميين لأهداف التربية موضوعين بطريقة منطقية ومتسقين داخليا ، وهما يخصصان السلوكيات المعرفية والوجدانية المتوقع أن يظهرها الطلاب كنتيجة لنظامنا التربوى . وحيث أن عملا قليلا قد أنجز فيماعدا برامج التربية الخاصة — فى المدارس الثانوية والكليات بالنسبة لتدريس المهارات الحركية ، فإن بلوم وكراثهول ومعاونيهما لم يضيفوا بعد أساس تصنيفى للأهداف التربوية للمهارات الحركية .

وقد عرف بلوم (١٩٥٦) مجالات التعلم المعرفية والوجدانية كما يلى :—

يتضمن المجال المعرفى تلك الأهداف التى تتعامل مع إسترجاع وإدراك المعلومات ونمو القدرات العقلية والمهارات .. ويتضمن المجال الوجدانى أهدافا تصف التغير فى الإهتمام ، والاتجاهات ، والقيم ، ونمو أوجه التقدير ، والتوافق الكافى .

الأهداف المعرفية

نشر بنيامين بلوم وآخرون عام ١٩٥٦ أسس تصنيف الأهداف التربوية ، وتصنيف الغايات التربوية . والمرجع I : المجال المعرفى . والغرض من هذا النظام للتصنيف الهرمى هو وضع بنود للتغيرات المعرفية التى تولّد فى الطلاب كنتيجة لأهداف وطرق نظامنا التربوى الرسمى . والتغيرات العقلية القابلة للملاحظة (أى التغيرات التى تنتج من حل المشكلات) والإختبارات ، والملاحظات) متضمنة فقط فى أسس تصنيف بلوم . ويمكن أن يستخدم المعلمون أسس التصنيف كعامل مساعد فى صياغة الأهداف التعليمية ، وإختيار طرق التدريس ، وتصميم الإختبارات والأنشطة لتحديد تعلم الطالب . وقد وضع بلوم ومساعدوه بعد دراسة مستفيضة لعبارات الأهداف التربوية المأخوذة من عدة مصادر الأهداف المعرفية للدراسة فى المدرسة وفقا لتعقيد السلوكيات القابلة للملاحظة ووضع ترتيب هرمى يحتوى على ستة فصول رئيسية . هذه الفصول المعرفية موضوعة فى قائمة من الأبسط إلى الأكثر تعقيداً وهى :—

الأهداف المعرفية .

١ — المعرفة .
٢ — التفهم .
٣ — التطبيق .
٤ — التحليل .
٥ — التركيب .
٦ — التقويم .

وقد وُضع أساس التصنيف من قوائم أهداف المدارس والكليات فى مواد دراسية كثيرة . وسوف نحدد مناقشتنا لأساس التصنيف للأهداف وتطبيقات من رياضيات المدرسة الثانوية .

المعـرفة :

تؤكد الأهداف المعرفية على العمليات العقلية لتذكر وإسترجاع المعلومات بنفس الطريقة التى قدمت بها تقريباً . ونريد من الطلاب فى كل مقرر لرياضيات المدرسة الثانوية أن يتذكروا الرموز الرياضية ، والمصطلحات ، والحقائق ، والمهارات ، والمبادىء . ونتوقع من طلابنا تذكر رموز الجمع ، والطرح ، والضرب ، والقسمة ، وتعريف الأعداد الطبيعية والقياسية ، والحقيقية ، وتذكر حقائق الجمع ، والطرح ، والضرب ، والقسمة للأعداد ذات الرقم الواحد ، وتذكر خطوات إجراء القسمه المطولة ، وإيجاد الجذور التربيعية ، وصياغة المبادىء مثل نظرية فيثاغورث ، ونظرية العامل ، وقانون توزيع الضرب على القسمة . ويتضمن بند المعرفة فقط إسترجاع مادة رياضية معينة بشكل مماثل للذى قدمت به هذه المادة .

ويتطلب إسترجاع المعرفة أكثر من إحضار المادة المناسبة للعقل . ولسوء الحظ ، أحيانا قد تكون بعض المعارف غير ذات معنى أو قيمة لبعض الطلاب . وأنه ليس من المعتاد للطلاب فى بعض الأحيان ، أن يكرسوا جهدهم فى تعلم الرياضيات لتذكر معارف تعتبر سلسلة من الرموز ، والمقاطع ، والأنشطة التى ليس لها معنى بالنسبة لهم . ولا يتضمن بند المعرفة بالضرورة أى درجة من فهم الرياضيات إلا أن الخمسة مستويات الأعلى من الأهداف التربوية المعرفية تتطلب درجات مختلفة من الفهم .

التفهـم :

التفهم هو أدنى مستوى للفهم بالنسبة للطلاب . فطلاب يفهمون الفكرة الرياضية إذا إستطاعوا الإستفادة منها دون أن يكون من الضرورى ربطها بغيرها من الأفكار أو فهم كل تطبيقاتها . وأحد الفصول الفرعية للفهم فى الرياضيات هو القدرة على ترجمة العبارات اللفظية أو المشكلات إلى رموز رياضية والعكس بالعكس . فعلى سبيل المثال لفهم أن جا ٩٠ = ١ [sine (90°) = 1] تعنى أن هناك دالة رياضية تُسمى جا [Sin] والتى تحول الزاوية ٩٠° [90°] إلى ١ هو بيان وإظهار لنوع الفهم الذى يسمى الترجمة . ويوجد لدى كثير من الطلاب صعوبات مع المشكلات اللفظية فى الجبر لأنهم غير قادرين على ترجمة العبارات اللفظية إلى عبارات لفظية التى تشير أنهم ربما لم يفهموا معنى العبارات الجبرية ، والعبارات اللفظية .

والتفسير نوع آخر من الفهم وهو القدرة على تشكيل وجهات نظر جديدة للمادة . ومثال على التفسير هو فهم أن الأزواج المرتبة من الأعداد يمكن إستخدامها لتقديم النقط فى مستوى وبالعكس . وكثير من السلوك المتوقع من الطلاب فى رسم الدوال تحتوى على تفسير البيانات بطرق مختلفة ، وكذلك الاستكمال الذى يعتبر إمتداد لما وراء البيانات المعطاة . هذه القدرة للتنبؤ باستمرارية الإتجاهات ــ الاستكمال ــ هو أحد الأهداف التربوية التى تقع تحت عنوان التفهم . وأنشطة مثل رسم المنحنيات وفهم المنحنيات ، والمخططات ، وتفسير قوائم البيانات لها كأهدافها أنشطة الفهم للترجمة ، والتفسير ، والإستكمال .

التطبيق :

يستطيع الطلاب إظهار فهمهم لتجديد رياضى إستخدامه بطريقه سليمة إذا ما طلب منهم أن يفعلوا ذلك . ولإظهار القدرة على تطبيق تجديد رياضى يجب على الطلاب انتقاؤه وإستخدامه بطريقه سليمة فى موقف مناسب دون القول لهم بفعل هذا . إن تطبيق تجديد رياضى هو إستخدام التجديد فى مواقف معينة وملموسة دون تلقين . والقدرة على إنتقاء التكنيكات الرياضية المناسبة ، والبديهيات ، والنظريات لإثبات نظرية جديدة هى مثال لتطبيق الرياضيات . وإنتقاء وإستخدام مبادىء النسبة والتناسب لبناء نموذج لمنزل ومراجعة وصفه للطهى لستة أشخاص لعمل وجبة لشخصين هى أيضا أمثلة لتطبيق تجريدات رياضية . وحيث أن الأختبارات قد أظهرت أن معظم الراشدين فى أمريكا يمكنهم العمليات الحسابية الأربعة على الأعداد الكلية ، ولكن ٢٠٪ إلى ٤٠٪ فقط من هؤلاء الناس يمكنهم حل مشكلات الإستهلاك مثل حساب أجره تاكسى أو بنود حساب البقال ، ويبدو أن الأمريكيين يفهمون الحساب جيداً ولكنهم يطبقونه برداءة .

التحليل :

التحليل هو القدرة على تجزئة تركيب للبيانات إلى مركباته بحيث تكون هرم الأفكار المرتبطة واضحة ، والعلاقات بين الأفكار بينة . وقد عرف بلوم وآخرون ثلاثة أنواع من التحليل هى : تحليل العناصر ، وتحليل العلاقات ، وتحليل تنظيمات المبادىء . فالفهم يؤكد على فهم المادة الرياضية . وفى التطبيق يكون التأكيد على المعلومات المناسبة ، والبيانات المفيدة ، والقدرة على إنتقاء المادة وإستخدامها فى مواقف مناسبة . ويتعامل التحليل مع تجزئه المادة إلى أجزائها ، وإيجاد العلاقات بين الأجزاء ، وملاحظة تنظيم الاجزاء . ويتطلب تحليل تركيب رياضى مستوى عال من التفهم عن تطبيق هذا التركيب .

وبعض الأمثلة لتحليل العناصر هى القدرة على فصل الحقائق عن الفروض ، والقدرة على إدراك إفتراضات غير مصاغة ولكنها ضمنية ، والقدرة على فصل الفروض عن النتائج . وإحيانا عندما

تعطى كثير من الطلاب نظريات فى الهندسة فإنهم يستخدمون جزءً من نتائج النظريات كفروض ، وتحدث كثير من الأخطاء عندما يفشل الطلاب فى أخذ بعض الشروط الإعتبار عند إستخدام النظريات فيمكن إختصار العوامل المشتركة ، وليست الحدود ، فى الكسور . ويمكن قسمة كل من البسط والمقام لكسر على نفس العدد الذى لا يساوى الصفر . مجموع المتوالية الهندسية هو

س = ا / (١ − ر) $\left[S = \frac{a}{1-r}\right]$ إذا كانت ر٢ > ١ $\left[r^2 < 1\right]$ وفى مثلث قائم ا٢ + ب٢ = حـ٢ $\left[a^2 + b^2 = c^2\right]$

يتضمن تحليل العلاقات تعرف العلاقات ارئيسية بين عناصر تركيب رياضى ما . وعند حل مشكلات لفظية فى الحساب ، والجبر ، وحساب المثلثات ، والتفاضل يجب على الطلاب تحليل العلاقات بين المجاهيل (المتغيرات) والمعلومات المعطاة (الثوابت) ومثال آخر على تحليل العلاقات هو القدرة — عند برهنة النظريات — تنظيم الفروض فى علاقاتها السليمة ببعضها البعض والبحث عن الأخطاء المنطقية فى البراهين الرياضية الكاملة .

وأكثر أنواع التحليل تعقيدا وصعوبة هو تحليل تنظيمات المبادىء ، وهو القدرة على تنظيم جميع عناصر وعلاقات تركيب معقد مثل الحقل الرياضى أو نظام الأعداد الحقيقية أو برهان رياضى معقد . ويتضمن هذا النوع من التحليل القدرة على ملاحظة وفهم التكنيكات الرياضية ، وفهم تنظيم منطقى لبرهان رياضى ، وفهم تركيب برهان رياضى .

التركيب :

التركيب هو القدرة على توفيق العناصر لتكوين تركيب وحيد أو نظام . ويتضمن التركيب فى الرياضيات توفيق وترتيب المفاهيم الرياضية ، والمبادىء لتكوين تركيبات رياضية . وهذا البند المعرفى يهىء لسلوك إبتكارى ويتضمن أنشطة مثل تكوين نظريات رياضية وتنمية تركيبات رياضية ووفقا للناتج الذى تم تركيبه ، هناك ثلاثة فصول جزئية للتركيب — إنتاج إتصال شفهى أو كتابى وحيد ، وتنمية خطة أو فئة من الأنشطة ، وإشتقاق فئة من العلاقات المجردة . فكتابة بحوث رياضية بسيطة ، وإنتاج أحاديث عن الرياضيات هى أمثلة من إنتاج إتصالات وحيدة . وإنتاج خطة أو فئة من العمليات يُوضح عن طريق تنمية خطة ما لتدريس وحدة فى الرياضيات أو تصميم خوارزمية لحل نوع معين من المشكلات الرياضية . والعديد من برامج الكمبيوتر لحل المشكلات الرياضية المعقدة هى خطط أو فئة من عمليات . وإجراء إكتشافات رياضية مثل إكتشاف نظريات رياضية جديدة أو تنمية نظام رياضى مجرد ومعمم هى أمثلة لإشتقاق فئات من العلاقات المجردة . وإبتكار نيوتن للتفاضل ، وتنمية جاوس للهندسة التفاضلية يتضمن تركيب فى أعلى مستوياته .

التقويـــم :

التقويم هو عمل أحكام عن قيم الأفكار ، والإبتكارات ، والطرق . والتقويم هو أعلى نوع من الأهداف التربوية لأنه يتضمن إستخدام المعلومات ، والتفهم ، والتطبيق ، والتحليل ، والتركيب قبل أن يمكن إنجازها . وأحيانا يمكن إنجازها . وأحيانا يمكن أن يقود التقويم إلى اكتساب معلومات جديدة ، وتفهم أفضل ، وتطبيقات جديدة ، وطرق وحيدة للتحليل والتركيب . وهناك نوعان من التقويم ــ الحكم فى ضوء دليل داخلى والحكم فى ضوء دليل خارجى . وعند الحكم على برهان رياضى وفقا لدقته ، ومنطقيته ، وإتساقه ، ووضوحه فإنها تقيم بدلالة محكات داخلية . وعند الحكم على نظريات رياضية وأنظمة وفقا لإسهامها فى تقدم الرياضيات فإنها بدلالة محكات خارجية .

إستخدام الأهداف المعرفية فى حجرة الدراسة

يعتقد بعض الرياضيين التربويين أن هناك تأكيد زائد على المعارف والفهم فى كتب الرياضيات ، وطرق التدريس ، وتعيينات الواجب المنزلى والاختبارات وتتطلب نسبه كبيرة من مسائل كتب رياضيات المرحلة الثانوية وإختباراتها المقننة المستوى الأدنى فقط من الأنشطة المعرفية للمعلومات والفهم . وتشير تحليلات مسائل الكتب والإختبارات التى يبنيها المعلم إلى أن طلاب رياضيات المدرسة الثانوية يطلب منهم بين الحين والآخر التدريب على التركيب والتقويم ، وأن كثيراً من المهام التى تتطلب التطبيق والتحليل مختلفة وغير وثيقة الصلة بالموضوع .

المعرفة والفهم فى تعلم الرياضيات :

يتم إكتساب الحقائق والمهارات الرياضية عادة من خلال الأنشطة المعرفية للمعلومات والفهم . وتعتبر المحاضرات ، والعروض ، وصحائف التدريب ، والعمل على السبورة الطباشيرية ، والإمتحانات الشفهية والتحريرية القصيرة والألعاب تكنيكات تعليم وتعلم فعالة لتحقيق أهداف تتعلق بالمعلومات والفهم .وتحتوى القائمة التالية على أهداف معرفية وأسئلة إختبار مناظرة للأنشطة المعرفية لإكتساب المعلومات الرياضية وفهم المهارات والمفاهيم الرياضية من مقررات رياضيات المرحلة الثانوية :

معلومات الحساب

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
١ ــ سوف يعطى التلاميذ تعريف العدد الزوجى	١ ــ عرف العدد الزوجى .

٢ — سوف يصيغ التلاميذ حاصل ضرب أى عددين صحيحين مكونين من رقم واحد .	٢ — ما حاصل ضرب (— ٣) ×(—٧)
٣ — سوف يتعرف الطلاب على إجراء الكسور	٣ — فى الكسر $\frac{٢}{٣}$ أى عدد هو المقام؟
٤ — سوف يوضح الطلاب معنى الجذر التربيعى لعدد ما	٤ — ما معنى الجذر التربيعى لعدد ما ؟

فهم الحساب

١ — سوف يعرف الطلاب الأعداد الزوجية والفردية	١ — أى من هذه الأعداد زوجى ؟ ٨ ، ١١ ، ١٩ ، ٣٥٢ ، ٧٨١ ، ٢٨ ، ١٠٠١ ، ٩٩٨
٢ — سوف يحسب الطلاب النسبة بين كسرين	٢ — أوجد هذه النسبة $\frac{٧}{٨} \div \frac{٢}{٣}$
٣ — سوف يقرب الطلاب الجذر التربيعى للاعداد .	٣ — أوجد الجذر التربيعى للعدد ٤٣ و ٣٩٨

معلومات الجبر

الهدف المعرفى	سؤال الإختبار
١ — سوف يعرف الطلاب الرمز $ا^{ن}$ $[a^n]$	١ — أشرح معنى الرمز $ا^{ن}$ $[a^n.]$
٢ — سوف يكتب الطلاب صيغة الدرجة الثانية .	٢ — أكتب صيغة الدرجة الثانية .
٣ — سوف يشرح الطلاب الرمز $لو_{ن}ا$ $[\log_n a]$	٣ — ما معنى الرمز $لو_{ن}ا$ $[\log_n a]$ ؟
٤ — سوف يعرف الطلاب الاحداثى الصادى والإحداثى السينى	٤ — عرف الإحداثى الصادى والإحداثى السينى .

فهم الجبر

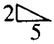
١ ــ سوف يحسب الطلاب قوى من نوع أ^ن $[a^n]$	١ ــ أى عدد يمثل بـ (ــ ٢)^٣ $[(-2)^3]$
٢ ــ سوف يحسب الطلاب اللوغاريتمات	٢ ــ أوجد لو٣ ٨١ $[\log_3 81]$
٣ ــ سوف يوجد الطلاب حاصل ضرب مقدار ذو حد واحد × مقدار ذو حدين	٣ ــ أوجد حاصل ضرب ٣ س(٢ س^٢ − ٤ ص) $[3x(2x^2 - 4y)]$
٤ ــ سوف يعطى الطلاب أمثلة عن معادلات الدرجة الثانية	٤ ــ أعط مثالاً عن معادلة من الدرجة الثانية .

معلومات الهندسة

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
١ ــ سوف يعرف الطلاب الدائرة	١ ــ ما تعريف الدائرة
٢ ــ سوف يذكر الطلاب منطوق نظرية فيثاغورث	٢ ــ أذكر منطوق نظرية فيثاغورث
٣ ــ سوف يذكر الطلاب تطابق المثلثات	٣ ــ أذكر نظريتين مختلفتين لتطابق المثلثات
٤ ــ سوف يعطى الطلاب تعريف كل من البديهية والنظرية	٤ ــ عرف البديهية . عرف النظرية

فهم الهندسة

١ ــ سوف يتعرف الطلاب على الأشكال الهندسة	١ ــ أعط أسماً لكل من هذه الأشكال الهندسية ⬡ □ ▽ ○
٢ ــ سوف يشرح الطلاب الفرق بين البديهية والنظرية	٢ ــ إعط مثالًا لبديهية ومثالا لنظرية وأشرح الفرق بين المثالين .

الهدف المعرفي	سؤال الاختبار
٣ ــ سوف يستخدم الطلاب نظرية فيثاغورث .	٣ ــ إستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد الوتر لهذا المثلث 
٤ ــ سوف يبين الطلاب الفرق بين التطابق والتشابه .	٤ ــ ارسم مثلثين متشابهين وغير متطابقين .

معلومات حساب المثلثات

الهدف المعرفي	سؤال الاختبار
١ ــ سوف يذكر الطلاب قانون الجيوب	١ ــ اذكر قانون الجيوب
٢ ــ سوف يعرف الطلاب الزاوية النصف قطرية	٢ ــ عرف الزاوية النصف قطرية
٣ ــ سوف يوضح الطلاب الفرق بين الأقواس والوتر	٣ ــ أذكر الفرق بين قوس دائرة ووتر الدائرة
٤ ــ سوف يعطى الطلاب قيم الدوال المثلثية	٤ ــ ما قيم جا ٣٠ ، ظا ٩٠ ، قا ٤٥ [sin(30°), tan(90°), sec(45°)?]

فهم حساب المثلثات

الهدف المعرفي	سؤال الاختبار
١ ــ سوف يوضح الطلاب لماذا ظا ٩٠° [tan(90°)] غير معرفة	١ ــ وضح لماذا ظا ٩٠ [tan(90°)] غير معرفة ؟
٢ ــ سوف يوضح الطلاب الفرق بين المقياس بالزاوية النصف قطرية والقياس بالدرجات .	٢ ــ حول ٣ زوايا نصف قطرية إلى زوايا بالدرجات . حول ٢٨٠° إلى قياس بالزاوية النصف قطرية .
٣ ــ سوف يصف الطلاب الفرق بين المعادلة المثلثيه والمتطابقه المثلثية .	٣ ــ ما الفرق بين المعادلة المثلثية والمتطابقة المثلثية ؟ أعط مثالا لكل منهما .
٤ ــ سوف يشرح الطلاب معنى الرمز ظا⁻¹ س [$Tan^{-1}(x)$]	٤ ــ أشرح معنى الرمز ظا⁻¹(س) ، ظا⁻¹(√٢) ؟ [$Tan^{-1}(x)$, $Tan^{-1}(\sqrt{2})$]

لاحظ أن أهداف المعلومات ، وبنود الإختبار التى تقيس المعلومات ، تتطلب من التلاميذ ذكر معنى رمز أو تعريف مصطلح . وتحقق أهداف المعلومات عندما يستطيع الطلاب بنجاح إسترجاع المعلومات والتعريفات بنفس الشكل تقريباً التى قدمت به فى الكتاب أو بواسطة المعلم . ويميل كثير من المعلمين إلى إفتراض أنه إذا ما أستطاع الطلاب كتابة التعريف الصحيح للمفهوم ، فإنهم يفهمون المفهوم بأسلوب ذى معنى . ومع ذلك فهذا ليس دائما الحال لأن كثيرا من الطلاب يتذكرون بفهم قليل ، وإن وجد ، للمفهوم المعرف . ولكى تكون متأكد بطريقة معقولة أن الطلاب يفهمون تعريفات المفاهيم فإن ذلك قد يتطلب سؤالهم لإستخدام المفاهيم فى تصنيف أمثلة ولا أمثله عن المفهوم . وحتى عند ذلك فإن المعلم لا يكون متأكد بأن الطلاب تفهموا المفهوم ، فعلى سبيل المثال قد يعرف المعلم المصفوفة على أنها تنظيم مستطيل من الرموز ويستخدم $\begin{matrix} ب & أ \\ د & جـ \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ○ & ⬡ \\ ▽ & □ \end{bmatrix}$ ، $\begin{matrix} ٣ & ٤ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ١- \\ ٧ & ١ & ٣ \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، كأمثله عن المصفوفات .

وعندما تسأل عن تعريف المصفوفة ، فإن الطلاب الذين لم يفهموا معنى كلمة تنظيم يكون باستطاعتهم تذكر تعريف المعلم ، وإعادة إنتاجه فى الإختبار . وقد يستطيعون تذكر أمثلة المعلم عن المصفوفات وإعادة إنتاجها عند سؤالهم عن أمثله للمصفوفات . وعند إختبار الفهم فإن من المفضل أن تسأل أسئلة تتطلب من الطلاب ترجمة التعريفات إلى مصطلحاتهم ، وتفسير وإعطاء أمثلة غير مألوفة وتمثيلات .

التطبيق فى تعلم الرياضيات :

ويمكن تحقيق الهدف المعرفى التالى ذى المستوى الأعلى ـــ التطبيق ـــ بإستخدام إستراتيجيات تدريس مثل المحاضرات ، والإيضاحات ، والمناقشات داخل حجرة الدراسة ، والرحلات الميدانية ، والمشروعات التى تقوم بها المجموعات الصغيرة خارج الفصل ، والعمل الصيفى الفردى ، والواجب المنزلى . وعادة ما نريد من الطلاب تطبيق معلوماتهم فى الرياضيات لتعلم رياضيات أكثر تقدماً وحل مشكلات عملية أو مثيرة .

ولكثير من الطلاب تكون المشكلات العملية مثل وزن الحسابات المالية غير مثيرة ، والمشكلات المثيرة مثل الفواتير الحسابية تكون غير عملية . وقليل من كتب الرياضيات يحتوى على مشكلات عديدة مثيرة وعملية لمعظم الطلاب ، وبالتالى يجب على المعلمين والطلاب أن يعملوا سويا لإيجاد مثل هذه المشكلات . وتعتبر هوايات الطلاب وعملهم بعض الوقت ، ومقالات الصحف والمجلات ، وفقرات الأخبار بالراديو ، وتقارير خاصة فى التلفزيون عن مشكلات الاستهلاك تعتبر مصادر

لمشكلات رياضية تطبيقية . وفى الحقيقة ، بعض من المعلمين ذوى الخبرة يستفيدون كثيراً من هذه المصادر فى جمع مواد لإستخدامها فى تدريس مقررات الرياضيات الإستهلاكية . وهناك قائمة من المشكلات المثيرة و/ أو العملية توضح التطبيقات فى الرياضيات مبينة فيما يلى . وهذه المشكلات قد أخذتها أنا وطلابى فى الإعتبار فى مقررات الرياضيات التى كانت مثيرة ومفيدة لنا فى ذلك الوقت . وبالرغم من أن طلابنا قد يجدون أيضا هذه المشكلات مثيرة ومفيدة ، فإنه من المفضل لك ولطلابك أن تحدد موضع المشكلات التطبيقية فى المصادر الحالية المذكورة سابقا .

مشكلات تتطلب تطبيقات معرفية فى الرياضيات

١ - حساب أو جبر . بدأ ولد يسير فى الطريق حاملًا سلة من التفاح . وقابل صديقا وأعطاه نصف عدد تفاحه بالإضافة إلى نصف تفاحه . واستمر فى السير فقابل صديقه ثانية وأعطاها نصف ماتبقى معه من التفاح بالإضافة إلى نصف تفاحه وفيما بعد قابل صديقه ثالثة وأعطاها نصف ما تبقى معه من التفاح بالإضافه إلى نصف تفاحة ، وأكتشف أن كرمه جعله يعطى كل ما معه من تفاح . كم عدد التفاح كان مع الولد عندما بدأ سيره ؟ يمكن حل هذه المشكلة باستخدام قليل من الحساب وكثيرا من التفهم ، أو يمكن حلها باستخدام معادلة جبرية معقدة برموز كثيرة للتجميع .

٢ - حساب أو جبر . إذا كنت سوف تعمل فى شركة وتخطط لكى تبقى فيها خمس سنوات على الأقل . هل من الأفضل لك الموافقة على ٥٠٠ جنيه زيادة فى المرتب سنوى ، أم ٢٠٠ جنيه زيادة فى المرتب شبه سنوية ؟

٣ - حساب مثلثات . وضع شجرة كبيرة ميتة فى منطقة مأهولة بالسكان ، فى يوم مشمس ، إستخدم حساب المثلثات لكى تحسب إذا ما يمكن أن تسقط دون تدمير أشجار أخرى ، أو أزهار ، أو حدائق ، أو بالقرب من المنازل .

٤ - جبر . ما الشكل المستطيل الذى مساحته فدان واحد الذى يمكن تسويره بأقل كمية من الحواجز ؟

٥ - جبر أو تفاضل . تتطلب العلبة الاسطوانة التى يحفظ فيها عصير الطماطم معدنا يكلف أكثر من ثمن عصير الطماطم الموجودة بالعلبة فإذا كانت العلبة تستوعب لترا من العصير فما طولها لكى تصل تكاليف المعدن اللازم لصنعها إلى حدها الأدنى ؟

٦ - حساب . خذ مجموعة من الطلاب إلى السوق ، وأجعلهم يقومون بحساب المقارنة بين الأسعار :

ا - التكلفة بالجرام وبالرطل لمسحوق الصابون .

صنف ١ ———— صنف ٢ ———— صنف ٣

ب ــ التكلفة بالجرام وبالرطل لعصير طماطم .

صنف ١ــــــــــ صنف ٢ ــــــــــصنف ٣

جـ ــ التكلفة بالجرام وبالرطل

صنف ١ــــــــــ صنف ٢ ــــــــــصنف ٣

أعد أيضا قائمة مشتريات للطعام والمؤن لعائلة من أربعة . وخذها للسوق وأحسب التكلفة الكلية للمشتريات فى القائمة إذا كانت البنود الأقل تكلفة سوف تدفع نقداً ، والتكلفة الكلية إذا كانت أكثر البنود تكلفة سوف لا تدفع .

التحليل والتركيب فى تعلم الرياضيات :

المستوى الرابع للأهداف المعرفية هو التحليل . وهذا هو تجزئة تركيب رياضى ما إلى مكوناته بحيث أن الترتيب الهرمى المرتبط بالتركيب ، والعلاقة بين الأفكار يصبحان واضحين . وإلى حد ما عكس التحليل هوالتركيب حيث يضع المتعلم الأفكار الرياضية معا ليكوّن تركيبا رياضيا معقداً . وعادة ما يمارس التحليل والتركيب فى حجرة دراسة الرياضيات بعد ما يكون الطلاب قد أستوعبوا المعارف وأكتسبوا الفهم للمفاهيم الرياضية الأساسية .

ويتطلب حل المشكلات اللفظية الرياضية ودراسة البراهين المكتملة للنظريات القدرة المعرفية للتحليل . ويمكن للمعلمين مساعدة الطلاب لتنمية قدراتهم التحليلية بتوضيح الأسباب لكل خطوة فى حلول المشكلات المتنوعة وبمناقشة الأساس المنطقى لكل عبارة فى براهين النظريات .

وتتطلب برهنة النظريات ، وكتابة التقارير ، وصياغة الفروض واختيارها للمهارة المعرفية للتركيب . ويمكن للطلاب تحسين قوتهم فى التركيب بكتابة براهين النظريات ، وبإيصال تفسيراتهم للتركيب الرياضى المعقد للمعلم وزملائهم بالفصل (سواء تحريرياً أو شفهياً) ، وبتدريس المبادىء الرياضية لبعضهم . إن التركيب الفعال لإتصال رياضى مثل البرهان ، والايضاح ، أو خطوات حل مشكلة ، عادة ما يسبقها تحليل لمركبات المهمة التى سوف يتم تركيبها .

وأحد الأخطاء المشتركة ، ولكن غير المقصودة ، التى يقع فيها المعلمون أثناء محاولة تعليم تلاميذهم تحليل المشكلات ، وصياغة البراهين هى التركيز الزائد على القواعد والخطوات . وبالرغم من أن قوائم معينة للقواعد قد تكون مفيدة لحل أنواعاً معينة من المشكلات فهناك عناصر محاولة وخطأ ، وإبتكار وبصيرة متضمنه فى المستويات العليا للتحليل والتركب . وبرغم ذلك فمن المرغوب فيه عادة أن يُعد المعلمون جيداً لحجرة الدراسة ، ويعدون لحل المشكلات وبرهنه النظريات ، ويمكن فى بعض الأوقات أن يعود الطلاب لإعتقاد أن مثل هذه الأنشطة سهلة فعلا : إذا كانوا أذكياء بدرجه كافية لتعلم كيف يؤدونها . ومن المستحسن أن تظهر للطلاب أن الحلول الدقيقة المرتبه للمشكلات اللفظية وأن البراهين المفصلة المنطقية للنظريات التى تقدم عادة فى الكتب تتطلب بداية فيها مغالطة ، وإحباطات ، وأخطاء قبل أن يستطيع المؤلف إعداد إتصال مترابط لعمله . ويعد

كل من التحليل والتركيب أنشطة معرفية صعبة يمكن تعلمها والتدرب عليها من خلال تدريس معلمين مثابرين وإصرار طلاب لديهم دافعية جيدة لفترة من السنوات . ويحتاج معظم الطلاب التدريب على برهنة النظريات وحل المشكلات لعدة سنوات قبل أن يصبحوا على مستوى جيد فيها . وحتى عندئذ من الصعب أن تشرح لشخص آخر كيف تبرهن نظريات وتحل مشكلات . والقائمة التالية هى فئة من الأهداف المعرفية وفقرات الإختبار المناظره ، وتقيس على الترتيب الأنشطة المعرفية للتحليل والتركيب فى رياضيات المدرسة الثانوية .

التحليل فى الحساب

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
١ ـــ سوف يشرح الطلاب لماذا $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \div \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ تساوى $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{حـ}}$ [$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ is equivalent to $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$,]	١ ـــ أشرح لماذا يمكن كتابة القسمه $\frac{٢}{٣} \div \frac{٧}{١١}$ بالصورة $\frac{٢}{٣} \times \frac{١١}{٧}$ [$\frac{2}{3} \div \frac{7}{11}$ can be written as $\frac{2}{3} \times \frac{11}{7}$]
٢ ـــ سوف يذكر الطلاب السبب فى أن طريقة إقصاء ٩ هو أسلوب صادق لمراجعة جمع عمود من الأرقام .	٢ ـــ أشرح لماذا يُعتبر أسلوب إقصاء ٩ هو مراجعة صادقة للجمع .

الأعداد المضافه		ادخال الـ ٩
٣٨٩	←	٢
٩٦٤	←	١
٧٩١	←	٨
حاصل الجمع إدخال الـ ٩ فى الجمع ٢١٤٤	←	٢

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
٣ ـــ سوف يوضح الطلاب لماذا ٢١١٢ للأساس ٣ تساوى ٦٨ للأساس ١٠	٣ ـــ لماذا ٢١١٢ للأساس ٣ تساوى ٦٨ للأساس ١٠ ؟

التركيب فى الحساب

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
١ ـــ سوف ينمى الطلاب أساليب الضرب الأعداد بأساسات مختلفة .	١ ـــ كون جدول ضرب لأعداد ذات رقم واحد للأساس ٧ ، وأكتب فيه من القواعد والخطوات لإيجاد حاصل ضرب اعداد ذات رقمين وثلاثة للأساس ٧ .

٢ ــ سوف يكتب الطلاب برامج للكمبيوتر تحول الأعداد من أساس لآخر .	٢ ــ أكتب برنامج للكمبيوتر لتحويل أى عدد للأساس ١٠ لعدد مساو للأساس ٢ .
٣ ــ سوف يبرهن الطلاب أن مجموع عددين فرديين هو عدد زوجى .	٣ ــ برهن أن مجموع أى عددين فرديين هو عدد زوجى .

التحليل فى الجبر

الهدف المعرفى	سؤال الإختبار
١ ــ سوف يذكر الطلاب ويوضحون صدق قاعدة كرامر لحل ثلاثة معادلات فى ثلاث متغيرات .	١ ــ أذكر قاعدة كرامر لحل ثلاث معادلات فى ثلاث متغيرات . وإشرح لماذا تقود قاعدة كرامر حل صادق لنظام من المعادلات الخطية .
١ ــ سوف يذكر الطلاب بديهيات الإستقراء الرياضى وسوف بناقشون صدق تطبيقاته لبرهنة النظريات التى تحققها الأعداد الطبيعية .	٢ ــ أذكر بديهيات الاستقراء الرياضى وأشرح لماذا تعتبر تكنيكا صادقا لبرهنة النظريات التى تعتبر صادقة لجميع الأعداد الطببعية .

التركيب فى الجبر

١ ــ سوف يشتق الطلاب صيغة الدرجة الثانية .	١ ــ أشتق صيغة الدرجة الثانية .
٢ ــ سوف تذكر الطلاب نظرية ذات الحدين ويبرهنوا عليها .	٢ ــ أذكر وبرهن نظرية ذات الحدين
٣ ــ سوف يذكر الطلاب ويبرهنون صيغة لمجموعة متوالية هندسية محدودة .	٣ ــ اذكر وبرهن صيغة مجموع متوالية هندسية محدودة .

التحليل فى الهندسة

الهدف المعرفى	سؤال الإختبار
١ ــ سوف يناقش الطلاب العلاقات بين صدق قضية وصدق المقلوب والعكس ، وعكس النقيض للقضية .	١ ــ حلل وناقش العلاقات بين صدق قضية ، وصدق مقلوبها وعكسها وعكس نقيضها .

٢ — سوف يصف الطلاب طبيعة الجيوديس (أقصر مسافة بين نقطتين) على أسطح المستويـــات ، والكــــرات ، والأسطوانات ، والمخروطات .

٢ — حلل وناقش طبيعة الجيوديس على أسطح المستويات ، والكرات ، والأسطوانات والمخروطات .

التركيب فى الهندسة

١ — سوف يبرهن الطلاب نظريات من الهندسة المستوية .

١ — فى نفس الدائرة أو فى دوائر متساوية برهن أن الأوتار المتساوية متساوية البعد من المركز .

٢ — سوف يبرهن الطلاب نظريات من الهندسة الفراغية .

٢ — أثبت أن حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حاصل ضرب مساحة القاعدة × الارتفاع

٣ — سوف يشرح الطلاب نتائج مناقضة ، مسلمه أقليدس للتوازى على الهندسة المستوية .

٣ — أكتب مقال تناقش فيه نتائج تناقضين لمسلمة أقليدس للتوازى .

التحليل فى حساب المثلثات

الهدف المعرفى	سؤال الاختبار
١ — سوف يفسر الطلاب منحنيات الدوال المثلثية على صورة ص = أجا (ب س) $[y = a \sin(bx)]$	١ — أشرح النطاقات النسبية والفترات لدوال على صورة ص = أجا (ب س) $[y = a \sin(bx)]$ للقيم السالبة والموجبة ا ، ب $[a \text{ and } b]$ والجميع توافيق ا ، ب $[a \text{ and } b]$ مثل ا > صفر ، ا < صفر ب > صفر ، ب < صفر $\left[\begin{matrix} a < 0, & a > 0, \\ b < 0, & b > 0. \end{matrix}\right]$
٢ — سوف يشرح الطلاب العلاقة بين المنحنى وكل دالة دائرية (مثلثيه) ودالتها العكسية .	٢ — أشرح العلاقة بين كل دالة ودالتها العكسية لست دوال دائرية (مثلثية)

التركيب فى حساب المثلثات

١ ــ سوف يبرهن الطلاب على متطابقات مثلثية لأعداد حقيقية .

١ ــ برهن على صحة المتطابقة

$$\frac{٢ \text{جتا}^{٢} (٤ت)}{\text{جا} (٨ت)} = \frac{\text{جا} (٨ت)}{١ - \text{جتا} (٨ت)}$$

$$\left[\frac{2\cos^2(4t)}{\sin(8t)} = \frac{\sin(8t)}{1-\cos(8t)} \right]$$

لفئة من الاعداد الحقيقة .

٢ ــ سوف يبرهن الطلاب على أن دوال مثلثية معينة غير قياسية .

٢ ــ برهن على أن حا (١٠) $[\sin(10°)]$ هى عدد غير قياسى .

التقويم فى تعلم الرياضيات :

إن أعلى مستوى للنشاط المعرفى ــ التقويم ــ هو الحكم على المادة فى ضوء دقتها الداخليه ، وإتساقها ، وإكتمالها ، أو الحكم على المادة وفقا لمعايير خارجية مقبولة عامه . ويتطلب التقويم فى أكثر أشكاله تعقيداً إستخدام جميع الأنشطة المعرفية الأخرى . ويمكن للطلاب التدرب على التقويم من خلال التقارير ، والمشروعات والمناقشات داخل حجرة الدراسة ،
والألعاب فى حجرة الدراسة وبالرغم من أن التقويم نشاط معرفى مناسب للطلاب فى جميع الصفوف الدراسية بالمدرسة الثانوية ، إلا أنه من النادر التركيز عليه فى حجرة دراسة الرياضيات . وتبين القائمة التالية أنواع أهداف وأنشطة الطلاب المناظرة المناسبة لرياضيات المدرسة الثانوية .

التقويم فى الحساب

١ ــ سوف يصف الطلاب مميزات إثنين من خوارزميات ايجاد الجذر التربيعى ويقارنون بينها .

١ ــ أوجد الجذر التربيعى للعدد ١٧٣ و ٦٣٤٢ مستخدما كل من الطريقتين اللتين قدمتا فى الفصل . قارن بين الطريقتين وشرح مميزات وعيوب كل طريقة .

٢ ــ سوف يناقش الطلاب ويقارنون مميزات الحساب فى نظام الاعداد للقوى ٢

٢ ــ ناقش مميزات وعيوب الحساب فى نظام اعداد للأساس ٢ والحساب فى نظام اعداد للأساس ١٠

٣ ــ سوف يشرح الطلاب قيمة الحساب فى الأنشطة اليومية .

٣ ــ ما قيمة الحساب فى الحياة الواقعية ؟ ما عيوب عدم القدرة على الجمع ، والطرح والضرب ، والقسمة ؟ هل للكسور العشرية أى قيمة عملية ؟

٤ ـــ سوف يوضح الطلاب قيمة الصفر كعدد فى نظامنا العددية .

٤ ـــ أفترض أن ـــ مثل الناس الذين عاشوا منذ سنوات سابقة ـــ يجب علينا إستخدام نظام عددى بدون الصفر . ما الحدود التى يمكن أن توضع على نظامنا العددى وطرقنا فى الجمع والطرح ، والضرب ، والقسمة ؟

التقويم فى الجبر

الهدف المعرفى

١ ـــ سوف يقيِّم الطلاب مزايا حل أنظمة من المعادلات الخطية بطريقة التعويض ، وطريقة الجمع والطرح ، وبقاعدة كرامر .

٢ ـــ سوف يحكم الطلاب على قيمة توسيع نظام الأعداد ليحتوى الأعداد غير القياسية .

٣ ـــ سوف يوضح الطلاب المميزات النسبية لمقارنة الأعداد الكاردينالية للمجموعات بعد العناصر وبتحديد التناظرات الأحادية .

٤ ـــ سوف يدرك الطلاب التكنيكات المختلفة لحساب الاعداد المضبوطة وحساب الأعداد التقريبية ، وسوف يقارنون ويضعون مجموعتى العمليات الحسابية .

سؤال الإختبار

١ ـــ ناقش المزايا النسبية للطرق الثلاثة لحل أنظمة المعادلات الخطية ـــ التعويض ، والجمع ، والطرح ، وقاعدة كرامر .

٢ ـــ لماذا يعتبر إحتواء مجموعة الاعداد القياسية إلى النظام العددى أمر ضرورى ؟

٣ ـــ أحيانا نقارن عدد العناصر فى مجموعتين (الأعداد الكاردينالية للمجموعات) بحساب عناصر كل مجموعة ، وأحيانا أخرى نقارن الأعداد الكاردينالية لمجموعتين بتحديد التناظرات الأحادية بين عناصر المجموعات قيم المميزات النسبية لهذين الإجرائين « للحساب »

٤ ـــ معظم الأعداد التى نستخدمها فى الجبر أعداد بحته ومضبوطة ، ومعظم الأعداد التى نستخدمها فى العلوم والهندسة مقاييس تقريبية . قارن وقيم طرق التعامل مع حساب الأعداد البحته وحساب الأعداد التقريبية .

التقويم فى الهندسة

١ ــ سوف يحكم الطلاب على المميزات النسبية لإحداثيات الهندسية المتعامدة فى الجبر والهندسة التركيبية للهندسة المستوية الإقليدية .

١ ــ فى الجبر تقدم الخطوط ، والمنحنيات ، وأشكال المستوى كدالة على صورة ص = د(س) $[y = f(x)]$ التى يمكن رسمها بنظام إحداثيات متعامدة للمساعدة على دراسة خصائصها ، والمدخل لدراسة الخطوط والمنتجات وأشكال المستوى والمستخدم فى هندسة أقليدس المستوية مختلف تماما . قارن وقيم مزايا هذين المدخلين لدراسة المنتجات المستوية والأشكال .

٢ ــ سوف يصف الطلاب المزايا النسبية لطرق البرهان المباشر وغير المباشر وسوف يتاقشون الشروط التى تناسب كل طريقة

٢ ــ أعطى مثال لنظرية مبرهنه بالطريقة المباشرة ، ومثالا لنظرية مبرهنة بالطريقة غير المباشرة . ناقش المزايا النسبية لكل من الطريقتين والموقف المناسب لكل طريقة .

٣ ــ سوف يحكم الطلاب على قيمة تعلم كيفية البرهنة على النظريات فى الهندسة .

٣ ــ ما قيمة قدرتك على بناء براهين فى الهندسة ؟

٤ ــ سوف يقارن الطلاب الهندسة على مستوى والهندسة على سطح كرة ، وسوف يقيمّون فائدة كل من هذين النوعين للهندسة .

٤ ــ قارن بين الهندسة على مستوى والهندسة على سطح كرة وناقش قيمة كل نوع من الهندسة .

التقويم فى حساب المثلثات .

١ ــ سوف يصف الطلاب خطوات حل معادلة مثلثين ، وخطوات إثبات متطابقة مثلثين وسوف يقارنون بين الأسلوبين .

١ ــ حل المعادلة

٤ جا^{٤}(س) + ٣ جا^{٢}(س) − ١ = صفر

$$\left[\, 4\sin^4(x) + 3\sin^2(x) - 1 = 0 \,\right]$$

واثبت صحه المتطابقة

ظا (س) + ظتا (س) = ٢ قتا (س)

$$\left[\, \tan(x) + \cot(x) \equiv 2\csc(x) \,\right]$$

وأشرح الفرق بين معنى معادلة ،

	ومتطابقة ، وقارن بين الأساس المنطقى لحل المعادلة ، والأساس المنطقى لإثبات المتطابقة .
٢ — سوف يوضح الطلاب الأساس المنطقى لإستنتاج أن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ غير معرفه وأن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ $\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\right]$	٢ — نعلم من الحساب أن $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ غير معرفه ، ومع ذلك فى حساب المثلثات $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ $\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\right]$ وضح السبب فى التناقض الظاهر بين قيمتى هاتين العبارتين .
٣ — سوف يوضح الطلاب ويقارنون تعريف جا (س) $[\sin(x)]$ كدالة حلزونية فى دائرة الوحدة ، جا (س) $[\sin(x)]$ كنسبة المقابل على الوتر فى مثلث قائم الزاوية .	٣ — وضح كيف يمكن تعريف دالة الجيب بدلالة أجزاء مثلث قائم الزاوية وكدالة حلزونية فى دائرة الوحده . أى من هذين التعريفين أكثر فائدة ؟ هل يمكن حذف أحد التعريفين أو كلاهما دون أن نفقد شيئا فى الرياضيات أو تطبيقات الرياضيات ؟

خلاصـة :

إن أحد الأنشطة الأولية للتحضير لتدريس درس أو موضوع فى الرياضيات هو وضع الأهداف ، وأحد الأنشطة النهائية لقياس تعلم الطالب للدرس أو الموضوع . ويجب أن ترتبط أهداف الدرس إرتباطا جيداً مع أسئلة الإختبار والأنشطة المستخدمة لتقويم مدى إجادة الطلاب فى تعلم الدرس . ويمكن أن يشعر الطلاب باحباط شديد عند إختبارهم فى مادة لم تكن متضمنة فى دروس العلم ، وتبدو لهم غير مرتبطة بموضوعات الرياضيات التى درسوها . وأيضا إذا ركز المعلم على تقديم حقائق ومهارات ، وعرْف الطلاب الحقائق والمهارات وفهموها ولكنهم أختُبروا بأسئلة تتطلب تحليلا ، وتركيبا ، وتقويما ، ولا يمكن أن نتوقع منهم أن يجيبوا بطريقة جيدة ، ويتنمو إتجاهات موجبة نحو الرياضيات . ويجب أن يتفادى المعلم وضع الطلاب فى موقف يحتم التخمين عن الأسئلة التى سوف تحتويها إختبارات الرياضيات . وتحدث عادة مثل هذه المواقف إذا كان لدى المعلم أهدافا خاصة ولا يطلع الطلاب عليها ، أو إذا لم يكن لدى المعلم أهدافاً خاصة عدا تغطية المادة وإعطاء إختبار مرتبط بطريقة ما بالمادة .

وقد أعطى بلوم زملاؤه أساساً جيداً لتصنيف الأهداف التربوية المعرفية التى يمكن أن يستخدمها معلم الرياضيات فى فصله . وعندما يعد المعلم لتدريس موضوع أو وجده فى الرياضيات يجب أن يضع نوعين من الأهداف . يجب تحديد المحتوى الرياضى الذى سوف يدرسه ، وثانيا : يجب تحديد الأهداف المعرفية للطلاب . ويجب توضيح كلا من أهداف المحتوى والأهداف المعرفية للطلاب . وقد أظهرت كثير من الدراسات والبحوث عن الرياضيات فى حجرة الدراسة أن أداء الطلاب يكون أفضل إذا عرفوا مسبقا وبلغة يفهمونها ما هو المتوقع منهم تعلمه ، وما الطريقة المستخدمة لقياس تعلمهم . ويجب أن يعلم الطلاب مسبقا أنه من المتوقع منهم أن يعرِّفوا مفاهيم (المعرفه) ، ويتمكنوا من مهارات معينة (الفهم) ، ويحلون المسائل اللفظية (تطبيق) ، ويشرحون العمليات الرياضية (التحليل) ، ويبرهنون النظريات (التركيب) ، ويقارنون بين الطرق أو التركيبات الرياضية (تقويم) . وبعد ذلك على المعلم أن يعرض أمثلة ، ويعين واجبات منزلية ، ويبنى أسئلة إختبارات ترتبط إرتباطا وثيقا بالأهداف المعرفية للموضوع أو الوحده .

ويعتبر المستوى الأدنى من الأهداف : المعرفة ، والفهم ، والتطبيق يساوى من حيث الأهمية المستوى الأعلى من الأهداف : التحليل ، والتركيب ، والتقويم وذلك بالنسبة لرياضيات المدرسة الثانوية . فمن المهم أن يتعلم الطلاب المصطلحات والرموز الأساسية للرياضيات (المعرفة والفهم) والمهارات الحسابية البسيطة ومهارات حل المشكلات (الفهم والتطبيق) وبالتالى لا يجب على معلمى المدرسة وضع قيمة أكبر للمستوى الأعلى للأهداف المعرفية وهى التحليل ، والتركيب ، والتقويم لأنها تتطلب فحسب أنشطة عقلية معقدة والغاية الأولية للرياضيات التربوية هى تدريس المهارات الأساسية التى يمكن إستخدامها لتعلم مفاهيم ومبادىء رياضية أكثر تعقيدا ، والتى تدعم التطبيقات الرياضية الهامة العملية .

الأهداف الوجدانية

تتضمن معظم الأنظمة المدرسية كلا من الأهداف المعرفية ، والأهداف الوجدانية ومع ذلك فمعظم الأنشطة المدرسية تصمم لتركز على تمكُّن الطالب من الأهداف المعرفية ومعظم الإختبارات وإجراءات التقويم تقيس التعلم المعرفى وهناك ميل لقياس التعلم الوجدانى بطريقة غير موضوعية . وإهمال التعلم الوجدانى يرجع إلى أهداف من أهمها : أولا : ينظر إلى إتجاهات شخص ما ومعتقداته وقيمّه على أنها مسائل شخصية ، بينما ينظر إلى التحصيل على أنه شىء عام ثانيا : هناك تكنيكات قليلة جدا لقياس أوجه التقدير التى تستخدم مباشرة فى قياس الأهداف الوجدانية . ثالثا : قد أفترض ، وربما هذا خطأ ، أن الأهداف الوجدانية تحتاج إن فترة زمنية طويلة نسبيا لتحقيقها . رابعا عادة ما تصاغ الأهداف الوجدانية بصورة عامه بحيث يصعب تفسيرها بأسلوب يصلح للتدريس وللقياس . فعلى سبيل المثال الهدف الوجدانى الذى نصه « أن يقدر الطلاب قيمتهم كأعضاء فى المجتمع » وهذا الهدف من الصعب وضعه على صورة إجرائية أى لإستخدام هذا الهدف الوجدانى فى التدريس فإنه

من الضرورى إعادة بناء هذا الهدف فى أهداف خاصة يمكن فى ضوئها تطوير إستراتيجيات تعليمية وأدوات للتقويم .

وقد وضع كراثهول أسساً لتصنيف الأهداف الوجدانية التربوية ، وهى نظام مرتب من الاهتمامات ، وأوجه التقدير ، والإتجاهات ، والقيم . ويحتوى أساس التصنيف على خمسة بنود رئيسية ، وكل منها يحتوى على مستويين أو ثلاثة مسويات ، ويمكن وضعها فى قائمة كالتالية .

١ ـ الاستقبال .
أ ـ الوعى
ب ـ الرغبة فى الاستقبال
جـ ـ ضبط الانتباه وإختيار الموضوع

٢ ـ الإستجابه
أ ـ قبول الإستجابة .
ب ـ الرغبة فى الاستجابة.
جـ ـ الرضا عن الإستجابة .

٣ ـ الحكم القيمى (الحكم فى ضوء قيمة)
أ ـ تقبل قيم معينة .
ب ـ تفضيل قيمة معينة عن قيمة أخرى .
جـ ـ الاعتقاد الراسخ بقيمة معينة .

٤ ـ التنظيم القيمى
أ ـ تكوين مفهوم لقيمة معينة.
ب ـ تكوين نظام للقيم .

٥ ـ التمييز بقيمة أو بمجموعة من القيم .
أ ـ تكوين مجموعة عامة من القيم .
ب ـ التمييز فى ضوء هذه الفئة من القيم .

وبالرغم من أن دراسات مثل التقييم القومى للتقدم التربوى أظهرت أن معظم سكان الولايات المتحدة يتعلمون المهارات الحسابية فى المدرسة إلا أن دراسات أخرى أجرتها مجموعة دراسة الرياضيات المدرسية .S.M.S.G أشارت إلى أن كثيرا من الطلاب والراشدين قد أظهروا إتجاهات سالبة نحو الرياضيات وبالاضافة إلى تدريس الطلاب لكى يعملوا ، ويفهموا ، ويطبقوا و ... فإن المهتمين بالرياضيات التربوية يسعون وراء إستمتاع الطلاب بالرياضيات وبأعمال الرياضيين . وفى محاولة لزيادة إهتمام الطلاب بالرياضيات بدأ كثير من مؤلفى كتب الرياضيات تضمين معلومات تاريخية عن

الرياضيات والرياضيين فى كتبهم ، ويعرضون للطلاب قيمه الرياضيات ، وبعض استخدامتها الكثيرة .

وتحث بعض الأهداف الوجدانية الطلاب على تعلم الرياضيات ، ولكن الغرض العام من هذه الأهداف أكثر من مجرد إثارة دافعية الطلاب ويجب على المعلمين عند تدريس الرياضيات أن يساعدوا الطلاب على فهم وتقدير دور الرياضيات فى كل من المجتمع والتقدم التكنولوجى . والمناقشة التالية للأهداف الوجدانية وأمثلة منها وطرق قياسها سوف تساعدك على صياغة هذه الأهداف لطلابك .

أهداف الإستقبال :

عند مستوى الاستقبال ببنوده الثلاثة نريد أن يصبح الطلاب على وعى بالمعلومات الرياضية ولديهم رغبة فى تعلم الرياضيات ، وعلى حضور واعى لملاحظة وتعلم الرياضيات . وإذا لم يحدث هذا فلن يكونوا ناجحين على الأطلاق فى حجرة دراسة الرياضيات .

وسوف نعرض قائمة فى الأهداف فى هذا المستوى والأسئلة المناظرة لقياسها .

الأستقبال

الأهـداف	القياس
الوعى :	
سوف يتعرف الطلاب على أثر العلم والعلماء على تطور الرياضيات .	أى من العلماء الذين ، طوروا أفكارا جديدة فى الرياضيات ساعدوا العلماء فى عملهم العلمى ؟
الرغبة فى الاستقبال	القياس
سوف يصف الطلاب أهمية تعلم الأعداد المركبة .	لماذا نحتاج الأعداد المركبة فى الرياضيات ؟ وما هى بعض إستخداماتها فى العلوم ؟
	القياس
ضبط الإنتباه وإختيار الموضوع سوف يعبر الطلاب عن تفضيلهم لإحدى الطريقتين من طرق حل مجموعة من المشكلات .	أى من طرق حل نظاما من المعادلات الخطية تفضله ـــ الحذف أم التعويض ؟

أهداف الاستجابة :

إن البنود الثلاثة للإستجابه للمعلومات تذهب أبعد من مجرد الأستقبال . فتستلزم الإستجابه مستوى من الإنخراط المنشط للطالب . ففى أدنى مستويات الإستجابه ينتج استجابات الطلاب فقط

من الشكوى أو الطاعة . وفى المستوى التالى يكون الطلاب رغبة فى الإستجابة . وفى أعلى مستويات الإستجابة يحصل الطلاب على سعادة أو متعة من الاستجابة . وتعتبر الاستجابة تعلم سلبى للسلوك الوجدانى الذى يتطلب جهداً قليلًا من جانب المتعلم . والاستجابه هى تعلم وجدانى أو تعلم عن طريق العمل . وسوف نعرض قائمة من الأهداف فى هذا المستوى ومؤشرات قياسها .

الاستجابة

	القياس
قبول الاستجابة	
سوف يسلم الطالب تعيينات الوجبات المنزلية فى الوقت المحدد .	أعطى تعيينا للطلاب ثم اعادته للمعلم فى الوقت المحدد لتسليمه .
الرغبة فى الاستجابة	
سوف يتطوع الطلاب لإجابة الأسئلة فى حجرة الدراسة .	عندما يسأل المعلم سؤلا يرفع الطلاب أيديهم .
الرضا من الاستجابة	
سوف يستمع الطلاب باللعب بالمباريات الرياضية .	يؤلف الطلاب مباريات فى الحساب ويسألون المعلم السماح لهم باللعب بهذه المباريات فى حجرة الدراسة .

أهداف الحكم القيمى :

تمد الأهداف فى هذا المستوى الطلاب برؤية قيمة المدرك ، أو الفكرة ، أو الظاهرة ، أو النشاط ، أو السلوك . فالطالب الذى يقبل قيمة يكون لديه إلتزام قليل بهذه القيمة وسوف يعيد تقييمه لوضعه ، وربما يستبدل القيمة بأخرى مختلفة أو حتى متناقضة وتفضيل قيمة يتضمن مستو أعلى من التأكد بالنسبة لبقاء القيمة . والشخص الذى يعتقد فى قيمة ما لا يرفضها ، وربما يؤثر على الآخرين لقبولها . وعادة ما تعتنق القيم السياسية والدينية بدرجة عالية من الإعتقاد والإلتزام . وسوف نعرض لمجموعة من الأهداف فى هذا المستوى ومقاييسها .

الحكم القيمى

	القياس
تقبل قيمة معينة	
سوف يتقبل الطلاب قيمة تعلم الحساب .	يحضر الطلاب كل الحصص ، ويسألون أسئلة فى الفصل ، ويحاولون اكمال كل الواجبات المنزلية .
تفضيل قيمة معينة على قيمة أخرى	

سوف يظهر الطلاب تفضيلا لتعلم الرياضيات .	ينتقى الطلاب مقررات متقدمة فى الرياضيات ويشتركون فى نادى الرياضيات ويبحثون عن مشكلات تتحداهم فى الرياضيات .
الإعتقاد الراسخ فى قيمة معينة . سوف يلتزم طلاب معينون بدراسة الرياضيات .	سوف يدخل هؤلاء الطلاب منافسات الرياضيات ، وبقضون كثيرا من وقت فراغهم فى ممارسات رياضية ، وسوف يتخصصون فى الرياضيات بالكليات .

أهداف التنظيم القيمى :

وضح كراثهول وبلوم وماسيا (١٩٦٤) بند الحكم القيمى كالآتى :ـــ

عندما يستدخل المتعلم على التتابع قيم يواجه مواقف ترتبط بها أكثر من قيمة . وعلى ذلك فهو ينشىء (أ) تنظيما للقيم فى نظام ، (ب) تحديد العلاقات الداخلية بينها ، (جـ) يبنى العلاقات المهنية أو السائدة . وهذا النظام يبنى تدريجياً وعرضه للتغير باندماج قيم جديدة . وتجرى التغيرات بصعوبة أكثر عند الكبار عنها عند الأطفال ، ويصبح الفرد متصلبا أكثر مع مرور العمر ، ويكون أقل أستعداداً لقبول قيم غير متسقة مع تلك التى أحتواها . والتنظيم القيمى يحتاج إلى متطلبات أولية وهى تكوين مفهوم لقيمه معينة ، وتكون نظام للقيم . وعند تنظيم نظام من القيم يكون المتعلم مطالبا بترتيب تركيب ، وتسكين مجموعة معقدة من القيم ربما تكون غير مرتبطة . وسوف نعرض لأمثلة عن مستويات التنظيم القيمى ومقاييسها .

التنظيم القيمى

	القياس
تكوين مفهوم لقيمة معينة سوف يحاول الطلاب التعرف على التركيب المنطقى للرياضيات .	سوف يجرى الطلاب مناقشة لطبيعة البرهان والأساس المنطقى للرياضيات وسوف يوضحون قيمهم فى تطوير الرياضيات .
تكوين نظام للقيم يحكم الطلاب على إسهامات الرياضيات التى قام بها أناس من دول مختلفة .	الإهتمام بالتعيينات فى تاريخ الرياضيات ثم يتبعها مناقشة يمكن أن تستخدم فى تقييم النجاح فى تحقيق هذا الهدف .

التمييز بقيمة أو مجموعة من القيم :

فى هذه المرحلة تطور ونمو القيمة ، تنظيم القيم فى تركيب داخلى متسق ، ويعتنقها الفرد لبعض الوقت ، وتبنى كجزء من خصائص الفرد ، والبند الخاص بتكوين نظام عام من القيم يوضح التحديد المسبق لسلوك الفرد كل مرة عند مواجهة مجموعة معينة من الظروف . وعند مستوى التمييز فى ضوء فئة من القيم تكون القيم منظمة للغاية بحيث تميل تمييز الفرد لدرجة كبيرة ولا توضع الأهداف التربوية فى المدارس عند هذا المستوى لأن هذه الأهداف من التعقيد بحيث تنمو ببطء خلال فترة طويلة من الزمن ، كما أنه من الصعب ضبطها والتنبؤ بها ، وليس من السهل قياسها أو تقويمها . وسوف نعرض لبعض هذه الأهداف ومقاييسها .

التميز فى ضوء قيمة أو مجموعة من القيم

تكوين مجموعة عامة من القيم	القياس
قدرات الطلاب تقيدهم فى نجاح تعلمهم للرياضيات .	يظهر الطلاب إتجاهات موجبة نحو حصص الرياضيات ويبذلون قصارى جهدهم فى معرفة وفهم المفاهيم الرياضية والمبادىء .

التخطيط لدروس الرياضيات

أظهرت الملاحظات العديده لمعلمى الرياضيات ، وأشارت نتائج الأبحاث التربوية المنتظمة أن التدريس الفعال لدروس الرياضيات يتطلب الإنتباه الجيد لأربعة عشر نشاطا تخطيطيا يجب أخذهم فى الإعتبار عند إختيار موضوعات الرياضيات وتحضير الدروس . ويمكن تصنيف الأربعة عشر نشاطاً إلى ستة موضوعات رئيسية . ويتناول هذا الجزء التعرف على هذه الأنشطة وإجرائها .

المحتوى الرياضى :

١ ــ إنتقاء الموضوعات التى سوف تدرس وتسميتها .

٢ ــ التعرف على الأنشطة الرياضية فى الموضوع .

٣ ــ وضع كل موضوع فى تسلسله للترتيب الهرمى للموضوعات .

الأهداف التعليمية :

١ ــ التعرف على الأهداف المعرفية .

٢ ــ إنتقاء الأهداف المعرفية .

٣ ــ مشاركة الأهداف مع الطلاب .

إستراتيجيات التقييم القبلى :

١ ـــ تعرف المتطلبات الأولية للمحتوى الرياضى .

٢ ـــ تقييم استعداد الطالب لتعلم الموضوع .

إستراتيجيات التعليم / التعلم :

١ ـــ إختيار إستراتيجية مناسبة للتعليم .

٢ ـــ إدارة بيئة التعلم .

إستراتيجيات التقييم البعدى :

١ ـــ تقييم تعلم الطلاب .

٢ ـــ تقويم فاعلية التدريس .

المحتوى الرياضى

تحدد موضوعات الرياضيات المدرسية لمختلف الصفوف الدراسية تحديداً مسبقا من قبل وزارة التربية والتعليم حيث تشترك مجموعة من خبراء الرياضيات بالوزارة والمركز القومى للبحوث التربوية وأساتذة الجامعات فى تأليف كتب الرياضيات المدرسية . ونقرر هذه الكتب للدراسة على جميع المدارس الحكومية والخاصة أى أن المقررات موحدة بالنسبة لكافة المدارس بصرف النظر عن نوعية البيئة التى تقع فيها المدرسة .

وتخضع هذه المقررات من فترة إلى أخرى لعمليات تطوير للموضوعات التى تحتويها نهذه المقررات حيث تجتمع لجان مكونة من نفس النوعيات السابق ذكرها لدراسة موضوعات المقررات المختلفة وتطويرها فى ضوء التغيرات الحادثة فى علم الرياضيات ، وقطاعات المجتمع المختلفة وحاجات المجتمع والطلاب وغيرها من العوامل المؤثرة على عملية التعليم / التعلم .

وتعقد دورات تدريبية للمعلمين حيث يتم تدريبهم على تدريس الموضوعات الجديدة المطورة ، وكذلك تدريبهم على إستراتيجيات مناسبة لتدريس هذه المقررات وتحديد وتصميم الأنشطة المصاحبة والوسائل التعليمية المناسبة لكل موضوع من موضوعات المقرر .

ويضع تفتيش الرياضيات بالوزارة خطة زمنية لتدريس موضوعات كل مقرر يلتزم بها كل المعلمين المكلفين بالتدريس فى المدارس الحكومية ، والمدارس الخاصة التى تشرف عليها الوزارة .

وعند تدريس كل موضوع يجب أن يحدد المعلم المتطلبات الأولية اللازمة لتعلم هذا الموضوع ، أى المعلومات بما فيها من حقائق ، ومفاهيم ، ومبادىء ونظريات ، وكذلك المهارات الرياضية التى ينبغى أن تكون فى حصيلة المتعلم والتى تساعدة على فهم الموضوع الجديد ، وبعد تحديد المتطلبات الأولية والتأكد من وجودها فى حصيلة الطلاب يبدأ المعلم فى تدريس الموضوع المقرر ويُقيِّم تحصيل

الطلاب لهذا الموضوع وفى حالة ما إذا وصل تحصيلهم إلى المستوى المطلوب ينتقل المعلم إلى موضوع آخر ويتبع نفس الإجراءات السابقة وهكذا .

أهداف التعلم

بمجرد تحديد محتوى كل موضوع من موضوعات المقرر ، يصبح من السهل تقسيمه إلى دروس فى ضوء الخطة الزمنية الموضوعه من قبل تفتيش الرياضيات .

ومن العوامل التى تساعد فى إختيار إستراتيجيات التدريس وتسهيل تعلم ذى معنى ، تحديد وصياغة أهداف التعلم المعرفية والوجدانية ومناقشتها مع الطلاب . وتشير بعض الدراسات أن طلاب المعلمين الذين لديهم القدرة على صياغة أهداف سلوكية يتعلمون أكثر فمعرفة الأهداف الخاصة ومشاركة الطلاب فيها يسهل عليه التعلم . وترتبط أنواع الأهداف المعرفية والوجدانية التى يصيغها المعلمون لطلابهم بأربع متغيرات هى الخبرات الرياضية المراد تعلّمها ، والمستوى الصفى للطلاب ، ومرحلة النمو العقلى لهم ، وطرق التدريس الواجب إستخدامها ويعتبر الشكل التالى مرجع مناسب للمناقشة الآتية للعلاقة الداخلية بين ست من متغيرات التعليم / التعلم .

الخبرة الرياضية	المستوى الصفى	مرحله النمو العقلى	طرق التدريس
الحقائق	الصف السادس	العمليات الملموسة	العرض
	الصف السابع		البيان
			المعمل
المهارات	الثامن	بين المراحل	المجموعات الصغيرة
	التاسع		التفريد
المفاهيم	الأول الثانوى	العمليات المجرده	الإكتشاف
	الثانى الثانوى		الإستقصاء
المبادىء	الثالث الثانوى		التخصص

أهداف معرفية

معرفة
فهم
تطبيق
تحليل
تركيب
تقويم

أهداف وجدانية

الاستقبال
الاستجابة
الحكم القيمى
التنظيم القيمى
التمييز بقيمة أو مجموعة من القيم

إن الخبرات الرياضية (حقائق ومهارات ، ومفاهيم ومبادىء) تُدرس فى جميع المستويات الصفية ، ومع ذلك نميل إلى أن نركز على الحقائق والمهارات فى الصفوف الدنيا وعلى المفاهيم فى الصفوف المتوسطة ، وعلى المبادىء فى الصفوف العليا .

ويميل المتعلمون فى الصفوف من السادس إلى الثامن إلى التفكير الملموس ، بينما فى الصفوف من التاسع إلى الثالث الثانوى يفكرون بطريقة مجردة ورغم هذا فأحيانا يفكر الجميع بطريقة ملموسة ، وسوف يتعلم معظم طلاب المدارس الثانوية أفضل إذا قدمت لهم المفاهيم والمبادىء وتم توضيحها بأشياء ملموسة ، وعادة ما تُدَّرس الحقائق والمهارات بطرق العرض ، والبيان ، ونماذج التفريد ، ومدخل تدريس المفاهيم والمبادىء يمكن أن يكون من طريقة الإكتشاف ، والاستقصاء والنماذج المعدلة ومع ذلك فليس هناك قواعد حادة وفاصلة للمزاوجة بين الخبرات الرياضية ، والمستوى الصفى ، ومرحلة النمو العقلى ، وطرق التدريس .

وبعد إختيار الخبرات الرياضية للطلاب فى مستوى صفى محدد والمفروض أنهم قد وصلوا لمرحلة نمو عقلية معينه ، يجب مزاوجة المتغيرات الثلاثة لطرق التدريس والأهداف المعرفية والوجدانية مع متغيرات التعليم/ التعليم الأخرى .

وعادة ما تكون المعرفة والفهم والتطبيق (ودرجة ما من درجات التحليل) أهدافا معرفية مناسبة لتعليم الحقائق والمهارات . وبالرغم من أن تعلم المفاهيم يتضمن المعرفة والفهم والتطبيق ، إلا أن أهداف التحليل مناسبة جداً للمستويات العليا لتكوين المفهوم . ويعتبر التحليل والتركيب والتقويم من الأهداف المناسبة عند مقارنة مجموعة من المبادىء أو التركيبات فى النظم الرياضية . وأيا كانت الأهداف المعرفية المختارة فمن المهم أن تتذكر أن هذه الأهداف ترتبط بعمق الدراسة لكل موضوع ، وبطبيعة الأسئلة التى يوجهها المعلم ، ونوع الواجبات المدرسية ، وبإختيار أسئلة الإمتحانات .

مصادر التعلم

بعد تحديد المحتوى الرياضى للدرس والأهداف التعليمية للموضوع المختار ، فإن النشاط الهام التالى للمعلم هو تحضير المصادر التعليمية . وقد أصبحت مصادر التعليم/ التعلم فى السنوات الأخيرة متاحة بأنواع وكميات متغيرة للمعلمين . ولم يعد المعلمون بعد يركنون إلى الطباشير والسبورات الطباشيرية والكتب المدرسية فقط . وتستخدم المصادر التعليمية المتنوعة لتحسين إهتمام الطلاب بالرياضيات ، ولإثارة الدافعية للتدريب ، والمران على المهارات ، ولتوضيح وبيان المفاهيم والمبادىء الرياضية ، والإمداد بالعمل العلاجى لبطء التعليم ، وبالأنشطة الإضافية للطلاب الذين لديهم دافعية أكثر ، والذين يتعلمون بسرعة أكبر . وحيث أن التعليم يحدث داخل كل طالب فإن التعليم يعتبر عملية متفردة لدرجة كبيرة . وبالتالى فإنه يجب تفريد إستراتيجيات التعليم/ التعلم للطلاب أيضا . وهذا يعنى أن النسبة المعلم – الطالب المثالية هى معلم لكل طالب أو لكل مجموعة صغير من

الطلاب . وتكلفة مثل هذا النظام المثالى فى أنواع المدارس المختلفة يعتبر باهظا ومحبطا ، وبالتالى يُدِّرس المعلمون مجموعات يتراوح عددها من ٢٠ - ٤٠ طالب أو أكثر بقليل . وبالتالى فإن إستخدام المصادر الإضافية للتعليم/ التعلم يعتبر طريقة ممتازة له لكثير من المعلمين للتفريد الجزىء فى تعليم كثير من الطلاب .

وبالإضافة للسبورة الطباشيرية يجب تزويد كل حجرة لدراسة الرياضيات بالمسقط فوق الرأسى Overhead projector ، وبشاشة عرض مستديمة وبمكتبة لحفظ الكتب والمصادر التعليمية ولوحات كبيرة للنشرات المختلفة . وهذا يُعتبر الحد الأدنى الضرورى لحجرة تدريس الرياضيات .

ويجب أن تتاح معدات إضافية للمعلمين مثل شرائط التسجيل ، والمسقطات لعرض الأفلام ، والشرائح ، وماكينات للنسخ والتصوير . وكما يجب أن توجد معامل للرياضيات ، ومحطات فرعية للكمبيوتر ، ومراكز للتعليم الفردى .

ويمكنك كمعلم أن تجمع خلال سنوات متتالية مجموعة كافية من المباريات الرياضية ، والنماذج ، والملصقات ، وغيرها . كما يمكن حث الطلاب على إنتاج مصادر لتعليم الرياضيات والكثير منهم يشعر بمتعة عند إنتاج مثل هذه المصادر ، أو الإشتراك فى مجلة الرياضيات بالمدرسة أو نادى الرياضيات وغيرها من الأنشطة المصاحبة للمقرر الدراسى . كما يمكنك دعوة أحد خبراء الصناعة ، أو التجارة ، أو إدارة الأعمال للتحدث عن فوائد وتطبيقات الرياضيات فى تلك المجالات

هذا العرض لمصادر التعليم/ التعلم فى الرياضيات يعتبر موجزاً للغاية ولكن قد تناول أهم هذه المصادر وأقلها من حيث النفقات ومن حيث قابليتها للتطبيق فى مدارسنا فى ظل الظروف الحالية لمجتمعنا .

إستراتيجيات التقويم القبلى والتقويم البعدى

من المهم عند تخطيط دروس الرياضيات أن نأخذ فى الإعتبار طرق لتحديد إستعداد الطلاب لتعلم الدرس ، وتمكُّن الطالب من المادة الجديدة بعد تدريسها . وحيث أن نفس الإستراتيجيات تستخدم فى التقويم القبلى والتقويم البعدى فإن هذين النشاطين سوف يناقشان معا . وأغراض تكنيكات التقويم القبلى هى مراجع المتطلبات الأولية من الحقائق ، أو المهارات ، أو المفاهيم ، أو المبادىء للدرس قبل تقديمه لتحديد ما إذا كان الطالب قد تمكن من الخبرات الرياضية المطلوبة لتعلم المادة الجديدة . وتستخدم إستراتيجيات التقويم البعدى لتحديد إلى أى مدى قد تعلم الطالب ، كل موضوع رياضى جديد ، ومدى فاعلية إستراتيجية التدريس لهذا الموضوع فى مساعدة الطالب فى اكتساب أهداف الدرس المعرفية والوجدانية . ويدرك معظم معلمى الرياضيات قيمة ، وضرورة التقويم البعدى للتعلم ، ومع ذلك فالكثير يهمل مظهر التقويم القبلى فى تخطيط الدرس . وقبل إختيار إستراتيجية التقويم القبلى تمهيداً لتدريس موضوع جديد فإن من المفضل تحليل الموضوع إلى متطلباته الأولية من الحقائق ، والمهارات ، والمفاهيم ، والمبادىء . وبمجرد التعرف على المتطلبات الأولية ، فإنه يجب

مراجعة المعلومات الأولية الضرورية مع الفصل لمعرفة ما إذا كان أفراد الطلاب سوف يكونون قادرين على تطبيق المتطلبات الأولية فى تعلم المادة الجديدة . ويشير أحياناً أداء الطلاب فى الإختبارات السابقة إلى فهمهم للمتطلبات الأولية ؛ ومع ذلك قد يكون من المفيد إستخدام الإختبارات القصيرة فإنه يمكن تقويم التعلم من خلال ملاحظة المعلم للواجبات المنزلية ، والأعمال داخل الفصل ، والمناقشات وأسئلة الطلاب ، وإتجاهاتهم ، والمباريات الجماعية . وفى معظم الأحوال تكون المراجعة الموجزه للمادة السابقة نشاط مبدىء مساعد قبل تقديم موضوع جديد .

ويبدأ بعض المعلمين كل درس بربطه بالدرس السابق ، ثم يختتمون كل درس بتقديم الدرس القادم .

ولما كان التقويم القبلى لا يستخدم عادة لتحديد الدرجات ، فمن السهل ولكن ليس من الحكمة عدم إجرائه . ومع ذلك قليل جدا من معلمى الرياضيات يهملون التقويم البعدى ، برغم أن بعض المعلمين يستخدمون فقط الإختبارات القصيرة كاستراتيجيات للتقويم البعدى . وهناك أسباب متعددة لهذا التركيز على الإختبارات كتكنيك للتقويم البعدى أولا : يعتبر إختبار الطلاب فى مجموعات كبيرة وكل منهم يأخذ نفس الإختبار أقل إستهلاكا للوقت عن بعض الأشكال الأخرى للتقويم . ثانيا : يعطى درجات الإختبار (أو على الأقل تبدو أنها تعطى)مقياس موضوعى للأداء المقابل للطلاب . ثالثا : تعتبر الإختبارات التحريرية جزء تقليدى لنظامنا التربوى ، ومقبول على مدى واسع من الطلاب والآباء كطريقة مثالية لتعيين الدرجات .

ويجب أن يتذكر الفرد أن الإختبارات ليس هى الشكل الوحيد لتقيم الطالب . وبناء على الأهداف المعرفية والوجدانية تعتبر المناقشات والعمل الجماعى ، وفترات الاسئلة والأجابة ، والواجب المنزل ، والتعبيرات على وجوه الطلاب ، والمشروعات الفصلية ، والمشاركة فى حجرة الدراسة ، ومعامل الرياضيات ، مداخل صادقة ومفيدة لتقويم تمكن الطلاب . من الحقائق ، والمهارات ، والمفاهيم والمبادىء الرياضية .

وليس من الضرورى فقط أن يقيم المعلمون طلابهم ، ولكن يجب أيضا أن يقيموا نموهم المهنى ، وإتجاهاتهم نحو الطلاب ، ومدى مناسبة طرق تدريسهم .

إن أول وربما أفضل تقويم للمعلم هو الأداء المعرفى والوجدانى لطلابه ، ولكن إستخدام الأداءات المعرفية للطلاب ليس كافيا كمقياس وحيد لفاعلية المعلم . فمن المحتمل جدا لمعلم لا يُحب التدريس والطلاب أن تستخدم طرق تسلطيه مخيفة للتأثير على تمكن واضح لحقائق ، ومهارات الرياضيات ، ومع ذلك فإن التبعات الوجدانية على بعض الطلاب الذين يتعرضوا لمثل هذه الشخصيات للمعلمين وطرقهم قد تكون تدميرية .

وأحد الطرق الجيدة غير الرسمية لتقويم نموك المهنى هو أن تعمل قائمة للأهداف مع أسئلة تقويمية لذاتك ، وتجيب على هذه الأسئلة فى نهاية كل أسبوع مدرسى .

ولكى تصبح معلما مرموقا فإن ذلك يتطلب عددا كبيرا من الخطوات الصغيرة تأخذ خلال فترة زمنية لخمس سنوات على الأقل .

وهناك بعض الأنشطة المقترحة التى تستلزم أهدافا لتحسين نموك المهنى وهى :

١ — قم بإعداد درس كبير كل أسبوع يحتوى كل من الأربعة عشر نشاطاً لتخطيط دروس الرياضيات والتى سبق الإشارة إليها .

٢ — عين موضع أحد المصادر التعليمية الجيدة وأحضرها كل أسبوع وإستخدمها فى أحد فصولك .

٣ — قم بإعداد أحد المصادر التدريسية الجيدة سواء بمفردك ، أو مع معلمين آخرين ، أو مع الطلاب كل اسبوع وإستخدمها .

٤ — إقرأ ثلاث مقالات على الأقل أسبوعيا فى صحيفة مهنية مثل مجلة الرياضيات ، أو صحيفة التربية .

٥ — قم بإعداد أحد إجراءات التقويم الجيدة كل أسبوع وأستخدمها فى أحد فصولك .

٦ — أشترك فى أحد الأنشطة الإضافية للمنهج كل أسبوع .

٧ — تعلم مهارة رياضية ، أو مفهوم ، أو مبدأ رياضى جديد كل أسبوع .

٨ — قم بتجريب إستراتيجية تعليم / تعلم فريدة كل أسبوع ، وقيم فاعليتها ، وعدلها إذا أشار تقويمك إلى طرق لتحسينها .

٩ — قيم إتجاهاتك نحو التدريس والطلاب كل أسبوع . وإذ كان لديك اتجاهات غير مهنية قم بتحليل أسبابها ، وخذ فى إعتبارك طرق لتصحيح اتجاهاتك السلبية .

ويمكنك تقييم فاعليتك فى التدريس بطريقة أكثر تحديداً يوما بيوم بملاحظة إتجاهات الطلاب وسلوكهم فى فصلك . فإذا كان بعض طلابك يظهرون الملل بإستمرار ، ولا يستجيبون فيجب عليك أن تحاول إشراكهم فى الأنشطة داخل حجرة الدراسة .

إن مواصلة التدريس لخمس أو ست حصص رياضيات لفصول كل منها يحتوى على ٢٥ طالباً أو أكثر لمدة خمسة أيام أسبوعياً قد يؤدى إلى متابعة الطلاب الذين لا يشتركون فى أنشطة حجرة الدراسة . ويعتبر قيام الطلاب بحل مشكلات على السبورة فى وقت واحد طريقة ذات كفاية لملاحظة أنماط الأخطاء عند أفراد من الطلاب ، ويمكن أن تشير إلى المهارات التى تمكن منها عدد قليل من الطلاب .

وتعتبر مراجعة وتقويم الواجبات المنزلية للطلاب طريقة أخرى جيدة لملاحظة فاعلية طرق تدريسك على أساس يومى (كل يوم) وبالطبع لا يجب إستخدام نتائج إمتحان الطلاب كأساس لحساب الدرجات فقط ، ولكن يجب إستخدامها أيضا كتقويم فاعلية تدريسك .

وبرغم أن إستراتيجيات التقويم القبلى والتقويم البعدى للطلاب ، وإجراءات التقويم الذاتى صعبة ويستغرق وقتا ، إلا أنها أنشطة هامة جداً فى التدريس والتعلم ويجب أن تكون جزء متكامل لكل درس ، وموضوع ، ووحدة لتدريس الرياضيات .

وبدون التقويم المنتظم المستنير للتعليم والتعلم بحجرة الدراسة لا يمكن عمل الكثير بالنسبة لتحسين هذه الجهود الإنسانية .

إستراتيجيات التعليم / التعلم

هناك أنشطة عديدة وهامه فى تخطيط دروس الرياضيات . وهذه الأنشطة هى عوامل لإختبار إستراتيجية مناسبة للتعليم / التعلم لكل درس وعند تخطيط إستراتيجيات التعليم / التعلم يجب الإهتمام بكل من أنشطة المعلم فى تدريس الدرس ، وإدارة بيئة التعلم ، وإشتراك الطلاب فى أنشطة حجرة الدراسة . وهناك عدة إستراتيجيات للتدريس مثل العرض ، والبيان والمعمل ، والمجموعات الصغيرة والتفريد . ولما كان إختيار إستراتيجية معينة للتعليم / التعلم يرتبط إرتباطا وثيقا بالخبرات الرياضية المفروض تعلمها فسوف تناقش بالتفصيل نماذج لتدريس الحقائق ، والمفاهيم ، والمبادىء ، والإجراءات العامة لحل المشكلات مخططة فى ضوء الإستراتيجيات السابقة وذلك فى الفصلين القادمين .

تمارين وأنشطه

١ ــ أعد خطة دروس بالاكتشاف لمبدأ رياضى معين يتضمن الأربعة عشر نشاطا لتخطيط الدرس المذكوره بالفصل الحالى .

٢ ــ حضر قائمة بالمصادر التى تعتقد أنها مناسبة لمعمل الرياضيات . وأكتب تبريراً منطقيا لإختيار كل مصدر .

٣ ــ قم بإعداد نماذج رياضية متعدده ، أو إيضاحات جذابة لإستخدامها بحجرة دراسة الرياضيات ، أو مركز المصادر التعليمية .

٤ ــ ما أنواع إستراتيجيات التعليم / التعلم المناسبة لتدريس الحقائق ؟ المهارات ؟ المفاهيم ؟ المبادىء ؟ حل المشكلات ؟

٥ ــ إقترح مشروعات طلابية تكون ذات فائدة فى تعلم الخبرات للطلاب ، وينتج عنها إيضا إنتاج مصادر تعليم / تعلم كى يستخدمها الطلاب الآخرين .

٦ ــ قم بإعداد إختباراً من خمسة بنود عن تعلم الحقائق لموضوع رياضى معين ، واختبارا آخر من خمسة بنود عن المهارات لموضوع مختلف ، وإختبار من خمسة بنود عن المفاهيم لموضوع مختلف ، واختبار من خمسة بنود عن المبادىء لموضوع مختلف عن الموضوعات السابقة . هل بنود إختبارك تقيس الأهداف الوجدانية أم المعرفية ؟ ما الأهداف التى تقيسها بنود كل إختبار أو تُقوِّمها ؟

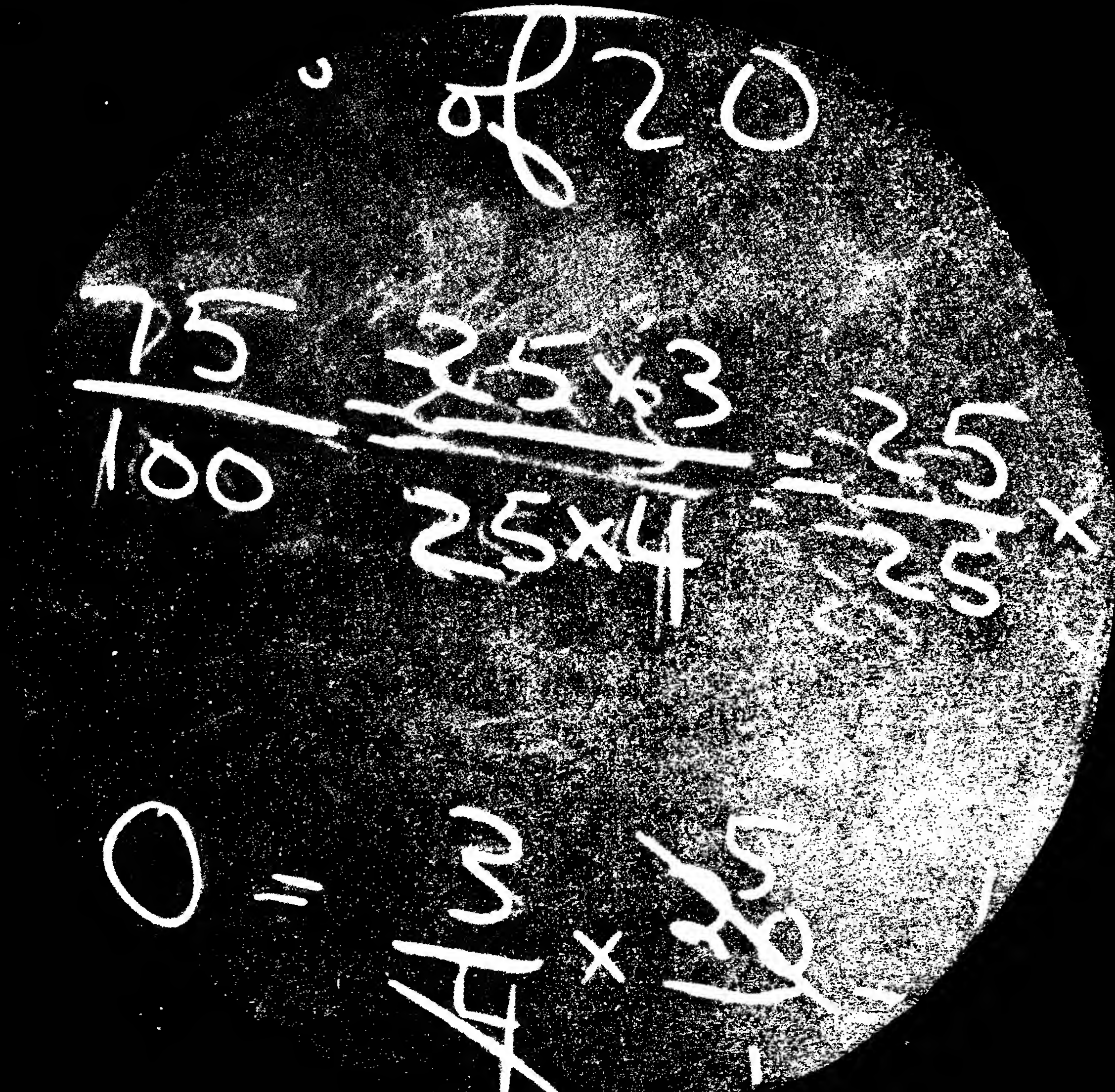
٧ ــ اذكر وناقش إستراتيجيات متعددة يمكن أن تستخدمها لتحليل وتقويم فاعليتك فى التدريس .

الفصل الثالث

نماذج لتعليم وتعلم الخبرات المباشرة في الرياضيات

- **نموذج العرض المباشر للتعليم والتعلم**
- **نموذج منظم الخبرة المتقدم**
  - مسلمات النموذج
  - إنماء منظمات الخبرة
  - تقديم منظمات الخبرة المتقدمة
  - الأنشطة التالية لتقديم المنظم
- **التعلم بالاكتشاف**
  - تعريف التعلم بالاكتشاف
  - أهداف إستراتيجيات الاكتشاف
  - طبيعة استراتيجيات الاكتشاف
  - دروس الإكتشاف
  - نتائج دروس الاكتشاف
  - خطة لدرس فى الاكتشاف
- **استخدام الألعاب فى تعلم الرياضيات**
  - الأهداف التربوية ومحددات إستخدام الألعاب
  - استراتيجيات لإستخدام الألعاب
  - تقويم الألعاب
  - أنواع الألعاب
  - مصادر الألعاب الرياضية
  - خطة لدرس بإستخدام الألعاب
- **نموذج التعليم والتعلم الفردى**
  - نموذج عام للتعليم الفردى
  - بعض البرامج المقترحة للتعليم الفردى
  - أساليب للتعليم الفردى داخل الفصل
- **النموذج الحلازونى للتعليم والتعلم**
  - تعريف التعليم والتعلم الحلازونى
  - أمثلة للمدخل الحلازونى فى تعلم الرياضيات
- **تمارين وأنشطه**

3



نماذج لتعليم وتعلم الخبرات المباشرة في الرياضيات

Models for Teaching and Learning the Direct Objects Of Mathematics

عرضنا فى فصل سابق ١٤ نشاطا لتخطيط دروس الرياضيات . وعلى الرغم من أنه لكل منها تأثيره على الطريقة التى تقدم بها دروس الرياضيات للطلاب ومدى تعلمهم للدرس ، إلا أن النشاطين الخاصين بإستراتيجيات التعليم والتعلم وهما : اختيار استراتيجية مناسبة للتدريس ، وإدارة بيئة التعلم يعتبران من أهم الأنشطة .

وسنعرض فى هذا الفصل نماذجا لتعليم وتعلم الرياضيات ، ونناقش مواقفا يكون فيها إستخدام نماذج معينة أكثر فعالية ثم نوضح كيفية إستخدام كل نموذج .

على الرغم من أن الكثيرين يستخدمون مصطلحى « نموذج » و « استراتيجية » بنفس المعنى فى اللغة الدارجة ، إلا أنه فى الاستخدام العلمى فإن المصطلح « نموذج » يختص بالعمليات المعممة ، بينما « الاستراتيجية » تعنى اجرائيات أكثر تحديدا فنموذج التعليم والتعلم هو عملية تعليمية معممه يمكن أن تستخدم فى موضوعات مختلفة كثيرة وفى مواد تعليمية متنوعة . واستراتيجية التعليم والتعلم هى اجراء معين لتدريس موضوع أو درس بعينه . فمثلا نماذج فردية (للتعليم الفردى) ونماذج جماعية (للتعليم فى مجموعات) ونماذج الاكتشاف ونماذج الاستقصاء يمكن أن تستخدم للتعليم والتعلم فى مواد تعليمية كثيرة . بينما الخطة الموضوعة لدرس والتى تتضمن احد هذه النماذج فى استرانيجية معينة لتدريس موضوع رياضى معين تستخدم فقط فى تدريس ذلك الموضوع .

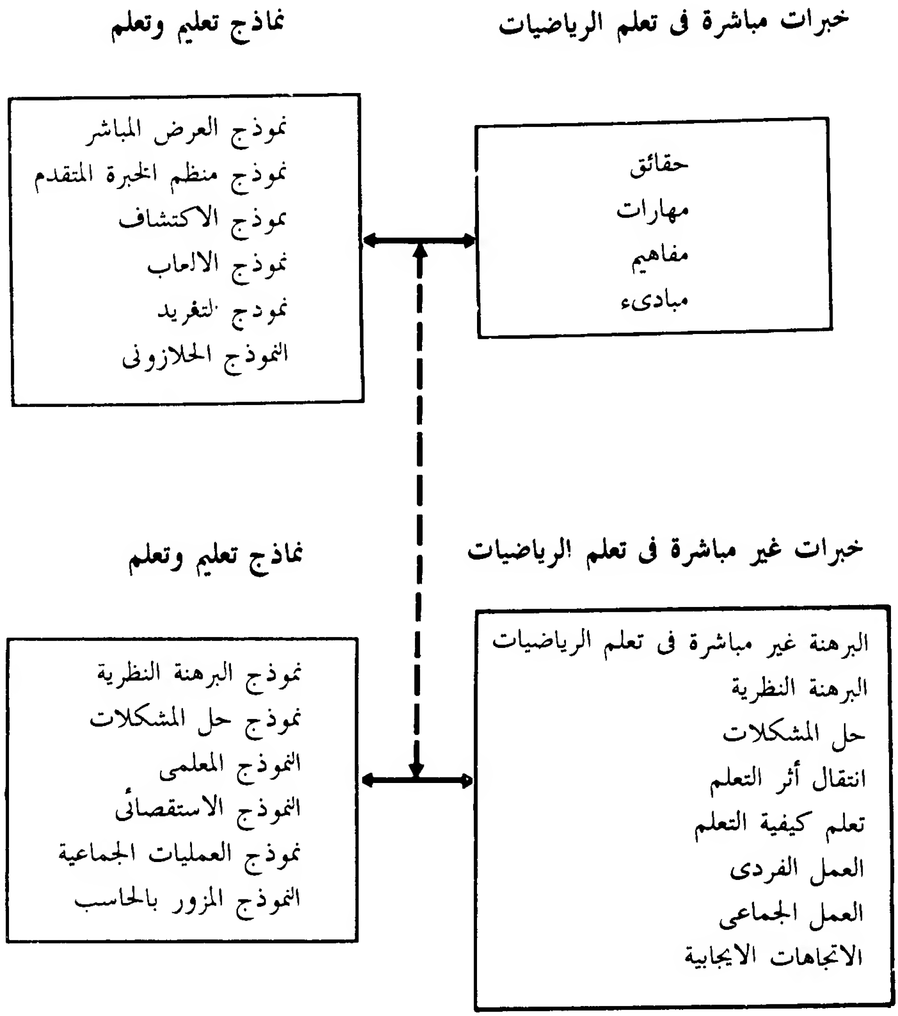
ويناقش هذا الفصل خواص عدد من نماذج التعليم والتعلم وكيف يمكن استخدام هذه النماذج فى انماء استراتيجيات لتعليم وتعلم موضوعات معينة فى الرياضيات . فخطة الدرس التى عرضناها فى فصل سابق عن تدريس أحد موضوعات الأحصاء هى استراتيجية لتعليم وتعلم كيفية اختبار فرض احصائى بإستخدام « مربع كاى » . هذا الدرس يستخدم استراتيجية العرض المباشر لتدريس موضوع رياضى معين . واستراتيجية العرض المباشر مبنية على نموذج عام للتدريس المباشر الذى يمكن استخدامه فى مواد تعليمية مختلفة على الرغم من أن مناسبة نموذج تعليم وتعلم معين مرتبطة بالخبرة الرياضية موضع التدريس ومرتبطة بأهداف التعلم المعرفية والوجدانية ، إلا أنه لا يمكن اقامة تناظر احادى (١ ــ ١) بين مجموعات النماذج وبين مجموعات من متغيرات أخرى للتعلم .

إن اختيار النماذج التدريسية عملية معينة وغير دقيقة . ومع ذلك تميل نماذج ميعنة للارتباط بأنماط معينة من الأهداف . وسوف نناقش ونوضح هنا اثنتى عشر نموذجا يمكن استخدامها بفعالية فى تدريس الرياضيات .

فى تدريس الرياضيات يمكن أن يوجه الحدس والمحاولة والتقويم اختيار النماذج التدريسية . وسوف يكتشف المعلم أن سمات الطلاب أفرادا وجماعات هى أيضا من العوامل التى تحدد بنجاح نماذج بعينها فى التعليم والتعلم . الطلاب الذين دربوا على تعلم الرياضيات من خلال طرق تدريس معينة يمكن أن يعاد تدريبهم حتى يشعروا بتعلم مريح حينما تستخدم طرق مختلفة . ومن العوامل الأخرى التى يجب مراعاتها عند اختيار نماذج التعليم والتعلم عوامل السن والشخصية والنماء العقلى والعاطفى . وسوف نقرن فى هذا الفصل نماذج التعليم والتعلم إما بخبرات مباشرة أو غير مباشرة فى تعلم الرياضيات ومع ذلك على القارىء أن يتذكر ان هذا البناء للنماذج والخبرات هو افراط فى تبسيط لعملية اختيار النماذج وهى العملية الأكثر تعقيدا .

والشكل التالى (٣ ــ ١) يبين ربطا بين مجموعتين من الخبرات المباشرة وغير المباشرة فى الرياضيات وبين بعض النماذج المناسبة لتنمية هذه الخبرات . وفى معظم دروس الرياضيات قد يكون أى واحد من النماذج مناسبا كما أن العديد من الخبرات المباشرة وغير المباشرة فى الرياضيات قد تدرس فى نفس الوقت . وسنقصر هذا الفصل على عرض النماذج المناسبة لتدريس الخبرات المباشرة فى الرياضيات ونترك نماذج الخبرات غير المباشرة للفصل التالى :

الشكل (٣ — ١) الخبرات الرياضية ونماذج التعليم والتعلم المرتبطة بها



نموذج العرض المباشر للتعليم والتعلم

السمة المميزه لنموذج العرض المباشر هو أنه يهيمن عليه المعلم . أى أن المعلم يحكم سير الدرس عن طريق انه يقدم المعلومات ويعرض حلول المشكلات . وهذا النموذج يناسب تدريس الرياضيات ذلك لانه يمكن للمعلم أن ينظم المادة التعليمية ويعرفها للفصل بطريقة فعالة وعندما يستخدم هذا النموذج بواسطة مدرس متفهم ممن يخلق فرصا متعددة للتفاعل مع الطلاب فإنه يمكن للنموذج أن يكون فعالا لتدريس الكثير من الموضوعات الرياضية حيث يمكن تقديم وتنمية الكثير من المفاهيم والمهارات والمبادىء الرياضية . ومع ذلك فإن بعض الخبرات غير المباشرة فى تعلم الرياضيات مثل البرهنة

النظرية وتعلم العمل بكفاءة فى مجموعة صغيرة أو ذاتيا يمكن أن يتم بطريقة أفضل بإستخدام نماذج تدريسية أخرى .

هناك ثلاث تغيرات للنموذج العام للعرض المباشر تستخدم فى تدريس الموضوعات الرياضية بحسب ما إذا كان الأمر يتعلق بتدريس مهارة أو مفهوم أو مبدأ . فعند تقديم مهارة يتضمن النموذج ثمانية أنشطة يسيطر عليها المعلم ، وعند تقديم مفهوم فإنه يتضمن تسعة أنشطة ، وعند تقديم مبدأ فإنه يتضمن سبعة أنشطة . ونلخص هذه الأنشطة فيما يلى :

أنشطة تستخدم فى تدريس المهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية

النشـــاط	الخبرة المناسبة		
	مهارة	مفهوم	مبدأ
(١) مناقشة الأهداف مع الطلاب	✓	✓	✓
(٢) تسمية المهارة أو المفهوم أو المبدأ	✓	✓	✓
(٣) تحديد ومناقشة المهارات والمفاهيم والمبادىء المتطلبة مسبقا (لدراسة موضوع جديد) من خلال التقويم القبلى	✓	✓	✓
(٤) تنمية المهارة من خلال مثال	✓		
تعريف مفهوم		✓	
استنتاج أو البرهنة على صحة مبدأ			✓
(٥) عرض المهارة أو المفهوم أو المبدأ من خلال مزيد من الأمثلة	✓	✓	✓
(٦) يجعل الطلاب ينمون خوارزميه للمهارة	✓		
يقارن أمثلة ولا أمثلة للمفهوم		✓	
يطبق مبدأ فى مواقف متعددة			✓
(٧) يجعل الطلاب يمارسون المهارة على تداريب متعددة	✓		
يجعل الطلاب يتعرفون على الأبعاد غير الهامة فى مفهوم		✓	
يقوم تمكن الطلاب من مبدأ من خلال التقويم البعدى			✓
(٨) يُقوم تمكن الطلاب من مهارة	✓		
يدع الطلاب يمارسون استخدام مفهوم		✓	
(٩) يقوم تمكن الطلاب من مفهوم		✓	

وسوف نناقش كلا من الأنشطة السابقة فيما يتعلق بتدريس مهارة وبتدريس مفهوم وبتدريس مبدأ .

النشاط (١) : يجب أن يبدأ المعلم الدرس بأن يخبر الطلاب ما المتوقع منهم أن يتعلموه فى الدرس أى أنه يجب أن يشارك الطلاب فى معرفة أهداف أدائه المعرفية والوجدانية .

النشاط (٢) : يجب أن تعطى المهارة أو المفهوم أو المبدأ الذى يعرض اسما (مصطلحاً) كلما أمكن ذلك وذلك بالمشاركة مع الطلاب .

النشاط (٣) : ينبغى أن يحدد المعلم المهارات والمفاهيم والمبادىء المباشرة المطلوب معرفتها قبل البدء فى موضوع جديد وأن يناقشها مع الفصل . يجب أن يضع المعلم قائمة كل خبرة متطنبة وأن يعد تقويما قبليا لتحديد ما إذا كان كل طالب معدا لتعلم المادة الجديدة .

الأنشطة الثلاثة السابقة تعد الطلاب لتعلم موضوع جديد عن طريق مساعدتهم فى فهم ما هو متوقع منهم ومن خلال مدهم باسم يمكن ان يربطوه بالموضوع ومن خلال ربط الدرس الجديد بالمهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية السابق دراستها والتى سوف تستخدم فى تمكين الطلاب من الخبرات الرياضية الجديدة .

النشاط (٤) : عند تدريس مهارة ما ، ينبغى على المعلم ان ينمى هذه المهارة بواسطة تطبيقها فى مثال معين . وعند تدريس مفهوم يجب تعريفة بلغة مناسبة لمستوى نضوح المتعلمين . وعند تدريس مبدأ فإنه يجب توضيحه بحالات خاصة أو استنباطه بعد عرض حالات خاصة . عند تدريس المهارات والمبادىء فإنه يكون من المهم أن نبدأ بمثال خاص للمهارة أو المبدأ بدلا من البدء بالتعميم المجرد والرمزى فمثلا عند تقديم مهارة حل معادلات الدرجة الأولى بالصورة ا س + ب = حـ $[a\ x + b = c]$ لا يصح أن يبدأ المدرس بتقديم الحل بالصورة س = $\frac{\text{حـ} - \text{ب}}{\text{ا}}$ $\left[x = \frac{c-b}{a}\right]$ ولكن الأفضل أن يبدأ بحالات خاصة مثل

٣س + ٤ = ٢	$3x + 4 = 2$
٣س + ٤ − ٤ = ٢ − ٤	$3x + 4 - 4 = 2 - 4$
٣س = − ٢	$3x = -2$
$\frac{\text{٣س}}{\text{٣}} = \frac{\text{− ٢}}{\text{٣}}$	$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$
س = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ −	$x = -\frac{2}{3}$

حيث يناقش المعلم خطوات الحل والمنطق وراء كل خطوه . هناك قليل من المعلمين يحاولون تقديم المهارات باستخدام قانون عام ولكن هناك عدد أكبر من المعلمين يميلون إلى تقديم المبادىء بصورة مجردة جداً . ففى الهندسة حيث عدد كبير من النظريات كل منها يعتبر مبدأ نجد أن كثيراً من المعلمين لا يقدمون النظريات من خلال حالات خاصة . فمثلاً بدلاً من تقديم المبدأ القائل بأن « الأقواس المتساوية يقابلها زوايا مركزية متساوية القياس فى نفس الدائرة » كنظرية يمكن تقديم حالات خاصة يستنتج منها الطلاب هذه العلاقة بالقياس ومن ثم يكتشفون المبدأ بأنفسهم ويمكن لهم صياغته كنظرية . هناك بعض المعلمين ممن يوبخون طلابهم بسبب استخدامهم ــ خطأ أفكارا حدسية وقياسات كخطوات فى برهنة النظريات وهذا يجعل هؤلاء الطلاب يعتقدون أنه لا مكان فى الرياضيات للحدس أو القياس .

وهذا خطأ فالحدس والقياس استخدما عبر التاريخ لاكتشاف الكثير من النظريات الرياضية . وحالما يتم اكتشاف مبدأ رياضيا عن طريق هذه الأساليب غير الدقيقة (منطقياً) فإنه يمكن صياغته كنظرية تخضع للبرهان المنطقى باستخدام الطرق الرياضية القوية . ومما لاشك فيه أن استخدام الحدس والقياس قد يقود إلى تعميمات خاطئة ولكن المزيد من القياس ومحاولات البرهان القوى سوف تكشف خطأ التعميم .

من المشكلات العامة فى تعريف المفاهيم هو استخدام كلمات لا معنى لها بالنسبة للطلاب . من الممكن أحياناً أن يقدم التعريف بصورة غير دقيقة تماماً ولكنها ذات معنى للطلاب . وبعد أن يستوعب الطلاب المعنى تعاد الصياغة فى صورة دقيقة بعد أن يشرح المعلم للطلاب أوجه القصور فى الصياغة الأولى . فمثلاً يمكن تقديم الدائرة والقطع الناقص والقطع المكافىء حدسياً على أنها قطوع من مخروط بأوضاع مختلفة ثم بعد ذلك تقدم تعاريف دقيقة كمحال هندسية تتحرك تحت شروط معينة .

النشاط (٥) : إن تنمية المهارات والمبادىء باستخدام حالات خاصة والعديد من الأمثلة يساعد على فهم تلك المهارات والمبادىء .

عند اختيار الأمثلة المختلفة لعرض مهارة ما ينبغى أن تشمل تمثيلا لكل نوع من المهارات المتطلبة مسبقاً والتى قد يواجهها الطالب فى استخدام المهارة الجديدة . فمثلاً عرض مهارة حل المعادلات الخطية بواسطة المعادلة – ٣س + ٧ = – ٥ $[-3x + 7 = -5]$ يتطلب استخدام مهارة قسمة عددين سالبين . وكذلك الحال عند عرض المبادىء فمثلاً عرض نظرية « الأقواس المتساوية يقابلها زاويا مركزية متساوية » يتطلب إعطاء أمثلة بحالات تتضمن زوايا حادة وقائمة ومنفرجة .

بعد تعريف مفهوم ما يعرض المعلم أمثلة متعددة ومختلفة للمفهوم وتختار تلك الأمثلة بحيث لا يحتوى أى منها على خواص غير ذات صلة بالمفهوم وبحيث تمثل كل خاصة متضمنة فيه . فمثلاً لعرض مفهوم التمثيل البيانى لأزواج الدوال الخطية يجب عرض أمثلة لأزواج من الدوال تمثل خطين

متوازيين ، تمثل خطين متقاطعين ، وتمثل خطين متطابقين كما تعطى أمثلة لدوال تمثل خطوطاً توازى محور السينات أو محور الصادات .

النشاط (٦) : بعد أن ينمى المعلم مهارة رياضية من خلال عرض العديد من الأمثلة يجب أن ينمى الطلاب نفس الخوارزمية باستخدام أمثلة جديدة . وتتم هذه الخطوة بأن يطلب من الطلاب فرادى أو فى جماعات صغيرة – أن يحلوا المزيد من الأمثلة وأن يشتقوا خوارزمية الحل من الحالات الخاصة .

الخطوة السادسة فى تدريس المفاهيم أن يبين المعلم للطلاب العديد من الأمثلة للمفهوم وأن يشرح سبب ذلك . أحد العوامل الهامة فى تعلم المفاهيم هو القدرة على تصنيف الأمثلة واللا أمثلة لكل مفهوم . القدرة على كتابة تعريف للمفهوم تبين أن الطالب يعرف المفهوم فقط . ولكن القدرة على تصنيف الأمثلة واللا أمثلة للمفهوم تبين فهم الطالب للمفهوم وقدرته على تطبيقه . ويعتبر تعلم الطالب تصنيف المفاهيم بواسطة العلاقات والدوال الرياضية من خلال دراسة معادلاتها وتمثيلها بيانياً – يعتبر هذا نشاطاً رئيسياً فى الجبر والمثلثات .

والخطوة السادسة فى تدريس مبدأ هو دفع الطلاب لتطبيقه على حالات مختلفة متعددة مع تغذية راجعة فورية من المعلم يبين فيها مدى مناسبة وصحة كل تطبيق . ويطبق كل مبدأ متضمن فى نظرية هندسية فى نظريات أخرى ونتائج أخرى . وقد يرى الطلاب أمثلة كثيرة لمبدأ ما ولكنهم لا يفهمونه ولا يتذكرونه ما لم يطبقوه فى مواقف متعددة .

النشاط (٧) : بعد أن ينمى المعلم مهارة جديدة من خلال أمثلة عديدة وبعد أن يعرض كل طالب المهارة باستخدام حالة خاصة فإنه على كل طالب أن يمارس المهارة باستخدام تمرينات كثيرة وأن يكون هناك تغذية راجعة فورية من قبل المعلم حتى يعرف الطالب مدى اكتسابه أو ضعفه فى أداء المهارة الجديدة وحتى يطمأن إلى أنه لا يستخدم خطوات غير صحيحة يصعب التخلص منها إذا استمر مدة طويلة يمارسها دون أن يعلم أنها خاطئة .

عند تدريس مفهوم ما يكون من المهم أن يتمكن الطلاب من تحديد الأبعاد التى لا قيمة لها بالنسبة للمفهوم . وهذا ما تؤكده الخطوة السابقة فى تعليم المفاهيم باستخدام نموذج العرض المباشر . فمثلاً عند تدريس مفهوم متوازى الأضلاع يكون من الضرورى التأكيد على أن المربعات والمستطيلات هى أيضاً متوازيات أضلاع وحتى لا يتصور الطلاب أن متوازيات الأضلاع لا تتضمن حالات تكون فيها الزوايا قائمة . إن الدوال الرياضية مستقلة عن طرق تمثيلها فقد تمثل الدالة بأزواج مرتبة من الأشياء أو بقانون رياضى . فمثلاً دالة الجيب يمكن أن تعرف كنسبة بين ضلعين من أضلاع مثلث قائم الزاوية وفى نفس الوقت فإن طول كل ضلع فى حد ذاته ليس هو المهم ولكن المهم هو النسبة بين الطولين .

إن النشاط السابع والأخير فى تدريس مبدأ باستخدام العرض المباشر هو التقويم البعدى (وهذا يمكن عمله كواجب منزلى أو كاختبار قصير شفوى أو تحريرى) . وذلك لتقويم نجاح كل طالب فى تعلم المبدأ وللمعاونة على التخطيط لاستراتيجيات التعليم والتعلم التالية للفصل ككل وللطلاب كأفراد . وعلى الرغم من أن المبدأ قد يكون قد درسه المعلم وطبقه الطلاب فإنه قد لا يكون كل طالب قد تعلمه . فالتقويم البعدى يقيس درجة فهم كل طالب للمبدأ وقدرته على تطبيقه فى حل المشكلات وبرهنة النظريات .

النشاط (٨) : النشاط الأخير فى تدريس مهارة – كما هو الحال فى المبدأ – يجب أن يكون تقويم مستوى تمكن الطالب من المهارة . فقد يختلف الطلاب فى قدراتهم على تطبيق المهارة فى مواقف مختلفة كما أن بعضهم قد يكون أنماطاً معينة من الخطأ تعيق استخدام المهارة الجديدة . ولا يكفى عند تقويم قدرة الطالب على استعمال المهارة تحديد الإجابات الخطأ أو الصواب . بل يجب تحليل كل تطبيق خاطىء لتحديد أوجه الخطأ ويلى ذلك دروس علاجية . ويجب ألا ينتقل طالب لتعلم مهارة جديدة إلا بعد وصوله إلى مستوى التمكن من المهارة السابقة خاصة إذا ما كان اكتسابها لازماً لاكتساب المهارة الجديدة .

النشاط الثامن فى تدريس المفاهيم هو مد كل طالب بتمارين عديدة تمثل المفهوم . وقد تتضمن هذه المفردات التدريبية تصنيف أمثلة ولا أمثلة للمفهوم واقتراح أمثلة للمفهوم وتطبيق المفهوم فى حل مشكلات أو برهنة نظريات .

وتختار المفردات التدريبية بحيث تمثل فيها الأبعاد غير المرتبطة بالمفهوم . وينبغى أن يكون هناك تقويم فورى لنجاح الطالب فى تحقيق أهداف هذه التدريبات وأن يعرف الطلاب مستوى تمكنهم من المفهوم .

النشاط (٩) : كما هو الحال فى المهارات والمبادىء فإن النشاط الأخير لتدريس المفاهيم بنموذج العرض المباشر هو التقويم البعدى لمدى معرفة الطلاب وفهمهم للمفهوم . فى كل مواقف التعليم والتعلم يصمم التقويم البعدى لقياس مدى نجاح الطلاب فى تحقيق الأهداف المعرفية والوجدانية . وكلما كان مناسباً فإنه يجب أن يشمل نموذج العرض المباشر مستويات عليا من الأهداف المعرفية والوجدانية . وأن توضع مفردات لاختبارات التقويم البعدى بما يتناسب مع أهداف التعليم .

على الرغم من أن نموذج العرض المباشر يهيمن عليه المعلم إلا أنه يمكن ان يتركز حول الطالب إذا ما حاول المعلم أن يجعل الطلاب يندمجون فى الدرس . دروس العرض المباشر السيئة يمكن ان تحدث عند ما يركز المعلم على المحتوى الرياضى ويحاضر الطلاب مع ندرة التفاعل مع الطلاب . كثير من المعلمين عديمى الخبرة من الذين يهتمون فقط باسلوبهم الذاتى فى التدريس وعلى صحة المادة الرياضية المقدمة يميلون إلى القاء محاضرات عن الرياضيات دون ادنى اهتمام بردود فعل الطلاب خاصة إذا لم تكن هناك مشاكل خاصة بالنظام داخل الفصل . وبعد بضعة اسابيع أو شهر من الخبرة فى التدريس

يتغلب معظم مدرسى الرياضيات على الطرق التى يستخدمونها والمتمركزه حول الذات ويصبحون أكثر ثقة فى معرفتهم وفهمهم للرياضيات وينمون أسلوبا للتدريس يسمح لهم بالتركيز على الطلاب وليس على أنفسيهم وعلى المادة .

المحاضرون الجيدون يلاحظون التعبيرات على وجوه الطلاب كما يلاحظون تفاعلاتهم الأخرى ويكيفون محاضراتهم بين الحين والحين .

ليس من الضرورى أن تكون استراتيجية العرض المباشر قاصرة على المحاضرة والعرض . فقد يلقى المعلم اسئلة ويستجيب للاسئلة التى ترد من الطلاب ويشجع المناقشات والتعليقات خلال كل درس . كثير من اسئلة المعلم غير الجيدة مثل « هل هناك اسئلة أخرى ؟ » أو « هل هناك تعليق ؟ » لا تثير استجابه من الطلاب . فاتجاهات المعلم وسلوكياته نحو الاسئلة والمناقشة هى التى تنشط أو تحبط مشاركة الطلاب فى نموذج العرض المباشر فالاستجابة السلبية للمعلم وتعبيرات وجهه غير المشجعة يمكن أن تبعد الطلاب من المشاركة . ولكن الاستجابات والتعبيرات الإيجابية تشجع الطلاب على المشاركة .

وعندما يلقى المعلم أسئلة يجب أن تصاغ بوضوح وفيما يلى أمثلة لأسئلة سيئة واسئلة جيدة :

أمثلة لأسئلة يلقيها المعلم

(١) سؤال سىء : ماذا تفعل عندما تجمع الكسور ؟

سؤال افضل : عند جمع الكسور التى لها نفس المقام ، ما هو مقام الكسر الناتج ؟

(٢) سؤال سىء : هل يمكن حذف أى شىء فى هذا الكسر ؟

سؤال افضل : هل هناك عامل مشترك يمكن القسمة عليه فى كل من البسط والمقام فى هذا الكسر ؟

(٣) سؤال سىء : ما الذى يمكن نقله (من طرف لآخر) فى هذه المعادلة ؟

سؤال أفضل : هل يمكن جمع نفس العدد لكل من طرفى هذه المعادلة للحصول على معادلة مكافئة أبسط ؟

(٤) سؤال سىء : هل يمكن تبسيط $\sqrt{٤س^٢ + ٤ص^٢}$ [$\sqrt{4x^2 + 4y^2}$] ؟

سؤال أفضل : هل هناك مقدار جبرى ذى معاملات حقيقية ومربعه ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ [$4x^2 + 4y^2$] ؟

(٥) سؤال سىء : ما هو عكس النقيض ؟

سؤال افضل : ما عكس نقيضه النظرية التالية :

اذا كان △ مثلثا متساوى الأضلاع فإن كل زواياه تكون متساوية » ؟

وعلى الرغم من أهمية إلقاء اسئلة جيده من المعلم فإنه يكون أكثر أهمية ان المعلم ينصت لإجابات الطلاب على الأسئلة ويحلل ويقوم تلك الإجابات قبل رد الفعل .

وعادة ما تظهر أوجه القصور التالية عند المعلمين عندما يحللون المعلومات المحتواه فى اجابات الطلاب :

(١) يطلب المعلمون اجابة معينة ويرفضون أية اجابات مختلفة عن ذلك .
(٢) لا يحلل المعلمون اجابات الطلاب ولا يقومونها وخاصة فى حالة الاجابات لخطأ .
(٣) يميل كثير من المعلمين إلى إعادة صياغة أو تكرار اجابات الطلاب على الأسئلة .
(٤) بعض المعلمين يسألون سؤالا ويطلبون اجابة من طالب ثم لا يعطون الطالب وقتا كافيا للاجابة .

بعض الطلاب ممن ينقصهم التمكن الرياضى وعدم القدرة على التعبير يعطون اجابات صحيحة على اسئلة المعلم ولكنهم يستخدمون تعبيرات غير دقيقة أو غير مناسبة عن الاجابة . لذا ينبغى على المعلمين أن يدربوا أنفسهم على تحليل كل اجابة صادرة من الطلاب بغض النظر عن المصطلحات والكلمات التى صاغ بها الطلاب الإجابة .

وعلى المعلم ان يصحح ما جاء خطأ فى التعبيرات غير الدقيقة مع التأكيد على صحة الأفكار المتضمنة فيها ويساعدهم على الصياغات الصحيحة الدقيقة للاجابة . يخطىء المعلمون عندما يتجاهلون الاجابات الخاطئة التى يقدمها الطلاب . والاجابات الخاطئة تدل احيانا على وجود صعوبات معينة وليست بالضرورة تدل على فشل الطلاب فى التعلم . وعندما يشرح الطلاب استراتيجياتهم التى وصلوا عن طريقها إلى الاجابات الخاطئة تتضح المفاهيم الخاطئة عندهم ويصبح تصحيحها سهلا وممكنا فوريا . وفى بعض الأحيان عندما يشرح الطلاب اجاباتهم الصحيحة يتضح أنهم يستظهرون الاجابات الصحيحة ليس إلا وذلك دون فهم أو استيعاب .

على الرغم من ان إعادة صياغة المعلم لإجابات الطلاب تزيدها دقة إلا انها يمكن ان تعوق التلاميذ ولا تشجعهم على الإجابة أو على الاستماع لبعضهم البعض . وحتى فى حالة إعادة صياغة الاجابة وهى صحيحة قد تجعل الطالب يفسرها على أنها نقد لإجابته مما قد يقلل استجابته بعد ذلك . كما ان ذلك قد يجعل الطلاب لا يلتفتون إلا لاجابات المعلم بغض النظر عن اجابات زملائهم الطلاب .

ويراعى ان يترك للطلاب بعض الوقت حتى يتمكنوا من الوصول إلى الاجابة وعدم اجابتهم الفورية لا يعنى عدم المعرفة ولكن قد يعنى التفكير فى الوصول إلى الاجابة وخاصة على الاسئلة ذات المستوى المرتفع من المجال المعرفى .

وعلى الرغم من ان نموذج العرض المباشر لا يجد استحسانا بين بعض المربين حاليا ، إلا أن هذا النموذج صالح وعملى لتدريس المهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية للطلاب . وإذا استخدم بصورة صحيحة فإنه يمكن أن يكون فعالا فى زيادة التعلم ذى المعنى فى الرياضيات . وكما هو الحال فى

الاستراتيجيات التدريسية الأخرى التى تستخدم بطريقة غير سليمة ، فإن استراتيجية العرض المباشر يمكن أن تفشل فى تحقيق الأهداف المرغوبة .

إن نموذج العرض المباشر أداة قيمة لمعلمى الرياضيات ويمكن ان يستخدم مع نماذج أخرى كما يمكن ان يعدل ليقابل متطلبات دروس معينة فى الرياضيات .

نموذج منظم الخبرة المتقدم

أنشأ وبحث دافيد اوزوبل Ausubel نموذج منظم الخبرة المتقدم للتعليم والتعلم وهذا النموذج قريب الارتباط بنموذج العرض المباشر . ويمكن أن يستخدم هذا النموذج كمكمل لنماذج أخرى كما يمكن ان يتكامل مع نموذج آخر ويبنى نموذج أوزوبل على نظريته فى التعليم اللفظى ذى المعنى . ويهتم هذا النموذج — والذى يستخدم مدخل تشغيل المعلومات للتعلم — ببنيه المادة الدراسية وبتركيب المعلومات فى العقل الانسانى . ويناسب هذا النموذج تدريس الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء المبنية على أهداف معرفية عند مستويات المعرفة والفهم .

يعتقد أوزوبل ان كل مجال اكاديمى يمكن أن يبنى بطريقة ينفرد بها إلى مهرمات من الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء . تحدد المفاهيم والمبادىء العامة والشاملة والتى تحوى حقائق ومهارات ومفاهيم ومبادىء أقل عمومية وشمولية وتوضع فى قمة البناء الهرمى . وطبقا لاوزوبل فإن هدف المنظومه التعليمية هو ان تحدد وتنظم بنى المعلومات هذه داخل كل مجال اكاديمى ثم تنقلها إلى الطلاب بطريقة تحمل معنى بالنسبة لهم . ينبغى على المعلمين ان ينظموا المعلومات بحيث يمكن ربطها بطريقة ذات معنى للبنيات المعرفية المتواجدة عند طلابهم .

الاستراتيجية المركزية فى نموذج الخبرة المتقدم هى استخدام المنظمات المتقدمة . والمنظمات المتقدمة لموضوعات أى مجال هى مواد تأتى فى المقدمة وتعرض على الطلاب على مستو عال من التعميم والتجريد والشمولية بالنسبة للمهام التعليمية التالية وعندما يُشكل منظم الخبرة بطريقة صحيحة وعندما يستقبله الطلاب بطريقة لها معنى عندهم فإنه يساعد الطلاب لتنمية بنيات عقلية تعاونهم فى فهم مادة التعلم الجديدة وتكاملها مع المواد الأخرى التى سبق تعلمها فى نفس المجال . وعند استخدام منظم الخبرة المتقدم فإنه ينبغى توظيف طرق التدريس التى تساعد على تكوين البنيات العقلية المستقرة والمتكاملة والمفهومه . التأكيد فى هذا النموذج يكون على البنية ، بنية المجال الأكاديمى وبنية المعلومات فى عقل المتعلم . من السهل نسبيا تحديد بنيه المجال الأكاديمى ، ومع ذلك فإن الطريقة التى يبنى بها المتعلم المعلومات فى عقله أكثر صعوبة فى تقويمها . انشأ هيوبرت كاليهان Callihan (١٩٧٥) طريقة لقياس البناء المعرفى المتضمن طرقا احصائية قوية لتحليل المعلومات المحتواه فى فقرات كتبها بعض الطلاب . حيث أعطى الطلاب قائمة منظمة عشوائيا من المصطلحات الرياضية المعروفة نسبيا والتى سوف تستخدم فى تعليم وتعلم قاعدة رياضية غير معروفة ثم طلب إليهم ان يكتبوا قطعة بحيث يستخدمون كل كلمة مرة واحدة على الأقل . بعد أن عرضت المادة الجديدة

ودرست ، طلب من نفس الطلاب ان يكبتوا قطعة ثانية بإستخدام نفس القائمة من المصطلحات . ثم حللت المعلومات والتركيب فى كل من القطعتين وتمت المقارنة بينهما . ويرى كاليهان أن هذا الأسلوب لقياس وتقويم المعلومات المحتواه فى كتابات الطلاب يمدنا بقياسات قبليه وبعديه للبنى المعرفية للطلاب . على الرغم من أن طريقة كاليهان تعتبر أداة بحثيه مفيدة لدراسة طبيعة التعلم إلا انها ليست طريقة عملية يستخدمها المعلمون العاديون لتقويم تعلم الطلاب . أظهرت الدراسات البحثية ان منظمات الخبرة المتقدمة يمكن ان تيسر التعلم رغم انه ينبغى على معظم المعلمين ان يحكموا على فعالية استخدام كل منظم خبرة من خلال أساليب تقويم بعدى مثل المناقشات والاختبارت القصيرة .

وفيما يلى عناصر نموذج منظم الخبرة المتقدم وهى عبارة عن الأنشطة التى يجب ان ينفذها المعلم عند استخدامه هذا النموذج لتقديم موضوع جديد .

عناصر نموذج منظم الخبرة المتقدم

(١) الالتزام بالمسلمات الأساسية للنموذج

(أ) التفاضل المتوالى

(ب) التوفيق التكاملى

(٢) انماء منظم الخبرة المتقدم .

(أ) منظمات العرض المباشر

(ب) منظمات المقارنة

(٣) تقديم منظم الخبرة المتقدم للطلاب

(٤) اختيار الأنشطة التى تلى تقديم المنظم

(١) مسلمات النموذج

تتجسد المسلمات الأساسية لنموذج منظم الخبرة المتقدم فى مبدأين لتنظيم محتوى المادة أسماهما اوزوبل : التفاضل المتوالى والتوفيق التكاملى .

ينص مبدأ **التفاضل المتوالى** على أن المفاهيم والمبادىء الأكثر تجريدا وعمومية وشمولية والمتضمنة فى موضوع ما من مادة معينة يجب أن تقدم أولا . ويتبع ذلك تقديم المفاهيم الأقل شمولية والأكثر محسوسيه . أى أن المفاهيم المحددة والمعلومات الحقائقية تقدم بعد المفاهيم والمبادىء العامه . يعتقد اوزوبل أن هذا المدخل « من القمه إلى القاع » سوف يساعد الطلاب فى تنظيم وبناء المعلومات

الجديدة ويجعل التعلم اكثر معنى . إن نقطة البداية لأى مقرر أو وحدة أو موضوع فى الرياضيات هى تقديم ومناقشة مبادىء عامة ثم يلى ذلك تقديم حقائق ومهارات ومفاهيم معينة : يستخدم معظم الناس شكلا من التفاضل المتوالى عندما يجمعون أجزاء متناثرة من صورة مقطعة إلى أجزاء حتى تكتمل الصورة الأصلية . ففى هذه اللعبة ينظر اللاعب إلى الصورة الكاملة المرسومة أعلى صندوق الأجزاء أولا ثم يستخدمها كخريطة عندما يبدأ فى تجميع الأجزاء بعضها إلى بعض حتى يصل إلى الصورة الأصلية كاملة . هناك طبعا من يحاول ان يجمع الأجزاء دون أن ينظر إلى الصورة الأصلية ولكن العمل يصبح بالنسبة له أكثر صعوبة .

هناك كثير من المواقف يكون تعلم الرياضيات فيها أيسر عند استخدام مدخل « من القمة إلى القاع » . كما أن هناك مواقف أخرى كثيرة يفضل فيها مدخل من القاع إلى القمة . صغار الطلاب فى الصفوف السادس والسابع والثامن الذين يميلون إلى التفكير حسيا قد يجدون صعوبة فى فهم المجردات عالية المستوى والمبادىء العامة وربما تكون منظمات الخبرة لهم أقل فائدة عن الطلاب الأكبر فى الصفوف الأعلى لاشك ان مبدأ التفاضل المتوالى صالح لبعض الطلاب فى بعض مقررات الرياضيات ولكنه غير مناسب لكل الطلاب فى كل مقررات الرياضيات .

المسلمة الثانية فى هذا النموذج هى مبدأ **التوفيق التكاملى** . وينص هذا المبدأ على أن المعلومات الجديدة يجب أن تتكامل وتتوافق بوعى وإدراك مع المواد التى سبق للطالب ان تعلمها فى نفس المجال . وهذا يعنى ان ينظم المعلمون عن قصد مقرراتهم ووحداتهم وموضوعاتهم بحيث يربط التعلم اللاحق بالسابق وان يعرف الطلاب العلاقات بين الموضوعات المختلفة بعد تحديدها لهم بوضوح ومناقشتها معهم .

ويرى اوزوبل ان التوفيق التكاملى يجب أن يتم داخل كل مجال اكاديمى وليس بين المجالات المختلفة فهو يعتقد ان لكل مجال بنيته المتميزه التى ينفرد بها وأن الغاية من أى نظام تعليمى هو نقل كل مجال إلى الطلاب . ولا يحبذ أوزوبل مبدأ التوفيق التكاملى بين مجالين حتى المجالات القريبة من بعضها مثل العلوم والرياضيات . ولا شك هناك من التربويين من يخالف رأى اوزوبل هذا .

مهما كانت وجهة النظر بالنسبة للتوفيق التكاملى بين المجالات فإن معظم معلمى الرياضيات يؤكدون أهمية هذا المبدأ داخل الرياضيات المدرسية . أحد مصادر صعوبات التعلم فى الرياضيات هو عدم قدرة كثير من الطلاب على رؤية العلاقات بين المقررات المختلفة فى الرياضيات ناهيك عن العلاقات بين الحقائق والمهارات والمفاهيم داخل نفس المقرر . كثير من الطلاب ينظرون إلى الجبر مثلا على أنه مجموعة من الحقائق والمهارات غير المترابطة ويرون القليل من الارتباط بين الجبر والهندسة والمثلثات .

ويمثل مبدأ التفاضل المتوالى والتوفيق التكاملى الأساس المفاهيمى لنموذج منظم الخبرة المتقدم كما يكونان الأهداف الأساسية للنموذج .

(٢) انماء منظمات الخبرة

يمكن أن يأخذ منظم الخبرة المتقدم أشكالا كثيرة كما يمكن ان يقدم بطرق متعددة . وفى جميع الحالات فإنه يجب ان يتضمن تحته المواد التى تلى ذلك والتى تساعد الطالب فى تنظيم تلك المواد . ويجب أن يكون كل منظم خبرة متقدم أكثر تجريدا وعمومية وشمولية من محتوى المادة التى ينظمها .

يحدد اوزوبل نوعين من المنظمات : منظمات العرض المباشر والمنظمات المقارنة . تكوِّن منظمات العرض المباشر تمد المتعلم ببنيه عقلية يمكن أن يربط بها المواد غير المعروفة (الجديدة) التى سوف تلى المنظم . تستخدم منظمات العرض المباشر لتقديم المواد غير المعروفة للطلاب . وتستخدم منظمات المقارنة عند تقديم المواد التعليمية المعروفة نسبيا عند الطلاب . تساعد منظمات المقارنة فى تكامل المفاهيم والمبادىء الجديدة مع المفاهيم والمبادىء السابقة تعلمها فى نفس المادة . كما تساعد منظمات المقارنة الطلاب على التمييز بين الأفكار المعروفة وغير المعروفة والتى تختلف جوهريا ولكن قد يوجد خلط بينها .

وتفيد منظمات المقارنة فى تدريس مقررات الرياضيات . فمنذ ثلاثين عام قبل أن يدرس مفهوم الداله كمفهوم موحد فى الرياضيات كان انتقال طلاب المرحلة الثانوية من الجبر إلى المثلثات أمرا محيرا بالنسبة لكثير من الطلاب . فى ذلك الحين كان الجبر يقدم كمجموعة من المهارات والأساليب مرتبطة بالمجاهيل والمقادير الجبرية والمعادلات التى تتضمن مجاهيل .

وفى المثلثات كانت الجيوب وجيوب التمام تعرف كنسب بين اضلاع مثلث ولم يكن يعطى الطلاب مفاهيم شمولية تصنيفية لتستخدم فى مقارنة مفاهيم الجبر والمثلثات . والآن تستخدم معظم كتب الجبر مفهوم الدالة كمفهوم تصنيفى شمولى فى الجبر ، كما أن كثيرا من كتب المثلثات تعرف الجيب وجيب التمام كدالة بالنسبة لدائرة الوحدة كذلك فإن مفهوم الدالة يمكن أن يستخدم كمنظم مقارن فى الانتقال من الجبر إلى المثلثات . وهنا يمكن للطلاب وبمساعدة المعلمين والكتب المدرسية إستخدام مفهوم الدالة لتكامل مفاهيم ومبادىء معروفة من الجبر مع مفاهيم ومبادىء جديدة من المثلثات .

(٣) تقديم منظمات الخبرة المتقدمة

لمنظمات الخبرة المتقدمة امكانات متعددة قويه ويمكن استخدامها لتدريس كثير من المهارات والمفاهيم والمبادىء فى الرياضيات . كذا تعتبر المنظمات المتقدمة مناسبة للاستعمال كمقدمات فى المحاضرات لانها تساعد كلا من الطلاب والمعلمين فى تنظيم وبناء المادة الجبرية . وعلى الرغم من انه كان ينظر فى أول الأمر إلى المنظمات المتقدمة على انها استراتيجية لفظية لتقديم مادة تعليمية جديدة فى شكل محاضرة ، إلا أنها يمكن ايضا أن تقدم فى سياق عروض عملية أو مناقشات جماعية أو لعبه أو تدريب معملى أو نموذج أو فيلم .

يختلف طول المنظم المتقدم من جملة واحدة تقال فى ثوان معدودات إلى سلسلة من التقديمات التى تستغرق مدة ساعات داخل الفصل . ومن المشكوك فيه ما إذا كانت المنظمات القصيرة المختصرة تمكن من تنظيم البنيات المعرفية للطلاب بقصد ادخال استبقاء المواد التعليمية التالية الأكثر تفصيلا وتفاصلا . ومن ناحية اخرى فإن المنظمات المفرطة فى الطول والتعقيد قد تجعل الطلاب يكونون بنيات عقلية عديدة قد تتداخل مع بعضها أو تُنسْىَ قبل تقديم المعلومات الأكثر محسوسية وتحديدا لاستيعابها فى هذه البنيات . احد الارشادات الحدسية (ولكنها ليست مدعمة أو مناقضة للدراسات البحثية) هو أن تقديم منظم الخبرة فى الرياضيات يجب أن يستمر لبضع دقائق على الأقل ولكنه يجب ألا يستمر لأكثر من حصة واحدة ويجب أن يوفر زمن تقديم المنظم فرصة كافية للطلاب لتكوين بنية عقلية مبنية على المنظم قبل أن يتوجه انتباههم إلى المعلومات الأكثر تحديدا . وفى جميع الحالات يجب أن يستعمل المنظم ولا يقدم منقوصا حتى لا يتسبب فى تكوين بنيات معرفية منقوصة يمكن أن تنسى أو تتداخل مع غيرها .

احد مشكلات استخدام المنظمات المتقدمة ان بعض الطلاب قد لا يعيرون انتباها لتقديم المنظم . لذا يجب على المعلم ان يضمن انتباه وتركيز الطلاب عند تقديمه للمنظم . وقد يكون مفيدا هنا ان تعطى مقدمة بسيطة قبل تقديم المنظم وذلك لحمل الطلاب على التوقف عن الانشطة الأخرى وجعلهم مستعدين لتلقى المنظم بإنتباه . كذلك يمكن الاشارة إلى المنظم بين الحين والآخر فى الانشطة التالية للتذكير به فى المواقف المناسبة لذلك .

(٤) الأنشطة التالية لتقديم المنظم

بعد تقديم منظم الخبرة المتقدم يجب أن يقدم فورا المادة التعليمية التى أعد المنظم الطلبه لتلقيها . وهذه المادة تكون اقل تجريدا وأكثر تحديدا من المنظم نفسه اى أنها تليه فى التنظيم الهرمى للمقرر . وعلى الرغم من أن المنظم المتقدم عادة ما يكون مجهزا ومحكوما من المعلم إلا أن المواد التعليمية التالية يمكن أن تكون أقل تجهيزا كما يمكن أن يحدث فيها تفاعلا بين المعلم والطلاب . بغض النظر عن الطريقة المستخدمة فى تقويم المنظم فإن بقية الدرس والدروس التالية له على نفس الموضوع يمكن ان تدرس بإستخدام أى نموذج تدريس مناسب . ومن ثم فإن نموذج المنظم المتقدم يمكن ان يدمج فى أى نموذج آخر أو يمكن استخدامه فى جزء فقط من الدرس .

أثناء سير الدرس وبعد تقديم المنظم يمكن أن يشير المعلم إلى المفاهيم التى يرسيها المنظم وأن يساعد الطلاب على رؤية كيفية أتفاق المادة التى تدرس مع البنية التى ينميها المنظم ومن المهم أن يراعى المعلم أن تقدم المادة التالية للمنظم بطريقة لها معنى عند الطلاب .

متى يستخدم نموذج المنظم المتقدم ؟

إن القول بأن المنظم المتقدم لابد وأن يكون على درجة عالية من التجريد والعمومية والشمولية يؤدى إلى أن الطلاب لابد وأن يكونوا على درجة كافية من النضوج العقلى للتعامل مع معلومات

تتطلب مستوى عاليا من العمليات العقلية . ولم يعط أوزوبل شيئا عن مرحلة النمو العقلى التى يكون قد وصلها الطفل حتى يتمكن من تناول هذا المستوى من التجريد فى مادة مثل الرياضيات . غير ان نظرية بياجية تشير إلى أن الطلاب الذين لم يصلوا إلى مرحلة العمليات الشكلية فى النمو العقلى لن يمكنهم تناول الدروس المبنية على نموذج المنظم المتقدم . وهذا يعنى أن نموذج منظم الخبرة المتقدم يجب أن يستخدم مع الطلاب الذين وصلوا إلى سن ١٢ سنه على الأقل .

أمثلة لإستخدام المنظم المتقدم

(١) تقديم للمقرر الأول فى الجبر* .

يجد الطلاب فى الأسابيع الاولى من دراسة المقرر الأول فى الجبر صعوبة كبيرة نظرا للرموز التى تبدو للطلاب كأشياء لا معنى لها . ويمكن استخدام نموذج المنظم المتقدم والعرض المباشر لجعله أكثر معنى للطلاب .

يهتم الجبر بالمتغيرات . والمتغير عبارة عن رمز يستخدم لتمثيل أى من عناصر مجموعة معينة وتستخدم الحروف الأبجدية للتعبير عن المتغيرات . والمجموعات المستخدمة عادة ما تكون مجموعات أعداد . والمجموعة التى تمثل عناصرها بمتغير تسمى مجموعة التعويض للمتغير ، وتسمى نطاق المتغير . والعناصر التى تحل محل المتغير تسمى قيم المتغير . والمتغير الذى له قيمة وحيدة يسمى « ثابت » .

فى الجبر سوف تتعلم حساب المتغيرات أى أنك تتعلم كيف يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على المتغيرات كما نتعلم إيجاد جذور وقوى للمتغير . المقدار فى الحساب عبارة عن مجموعة من الأعداد المرتبطة بعمليات جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة . والمقدار فى الجبر عبارة عن متغير أو عدد من المتغيرات يربط بينها عمليات جمع أو طرح أو ضرب أو قسْمة ويسمى مقدارا متغيرا . وكل من المقدار والمقدار المتغير يسمى مقدارا جبريا .

والمخطط التالى سوف يساعدك فى فهم هذه المصطلحات (يمكن للمعلم أن يرسم المخطط على السبورة أو على سبورة ضوئية أو يوزع نسخاً منه على الطلاب .

* يقدم المقرر الأول فى الجبر فى معظم مدارس الولايات المتحده فى الصف التاسع (المناظر للصف الثالث إعدادى أو الثالث المتوسط بالمدراس العربية) .

المتغير ↓	:	رمز يستخدم لتمثيل أى من عناصر مجموعة معينة (للتعبير عن المتغير تستخدم الحروف الأبجدية مثل س ، ص ، ع ، ل ، .... $[a, b, c, \ldots,]$
مجموعة التعويض ↓ (النطـــــاق)	:	مجموعة العناصر التى يمكن أن تحل محل المتغير (من أمثلة مجموعات التعويض المجموعات الجزئية لأعداد العد والاعداد الكسرية والأنواع الأخرى من الأعداد
قيم المتغير ↓	:	العناصر التى تحل محل المتغير من مجموعة التعويض . (مثل أى عدد أو كسر ينتمى إلى مجموعة التعويض)
الثابت ↓	:	المتغير الذى يأخذ قيمة واحدة . (بعض المتغيرات فى الجبر تأخذ قيما متعدده وبعضها يأخذ عددا لا نهائيا من القيم بينما بعض المتغيرات تأخذ قيما وحيده)
المقدار ↓	:	عدد من الأعداد ترتبط بالعمليات الحسابية . (٣ + ٥ ، ١١ × ٧ ، ٤ (٥ ــ ٣) ، $\frac{١}{٢} \div \frac{٧}{٨}$ ، ٣٢ ، $\sqrt{١٦}$ $\frac{١}{٢}$ كلها مقادير حسابية)
مقدار متغير ↓	:	مقدار يحتوى على متغير واحد على الأقل . (مثل س + ١ ، $\frac{س}{٢}$ ، ص (ا + ب) ٢س ، ع ، $\frac{س + ص}{ع + ل}$ ، س٣ ، $\sqrt{ص + ١}$) $[\, x + 1, \frac{x}{2}, y(a + b), 2r, z, \frac{x+y}{r+s}\, x^3, \sqrt{y + 1.)}\,]$
مقدار جبرى	:	أى مقدار أو مقدار متغير . (الأمثلة السابقة للمقدار وللمقدار المتغير هى أمثله للمقدار الجبرى)

بعد تقديم هذا المنظم بعرض مباشر للفصل واجابة أية اسئلة يثيرها الطلاب ، يطلب من الطلاب ان يعطوا أمثله لكل من المصطلحات السابق تعريفها آنفا . ويمكن ان يعطى الطلاب أيضا بعض المقادير الجبرية البسيطة لتحديد قيمها بعد التعويض عن المتغيرات التى تتضمنها بعناصر من مجموعات تعويض مختلفة .

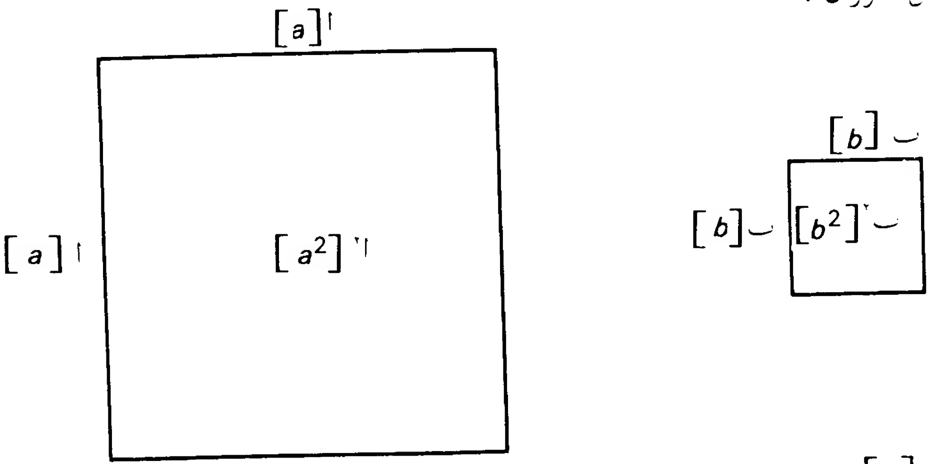
(٢) تقديم (ا ± ب)٢ ، (ا ± ب)٣ $[(a \mp b)^2$ *and* $(a \mp b)^3]$

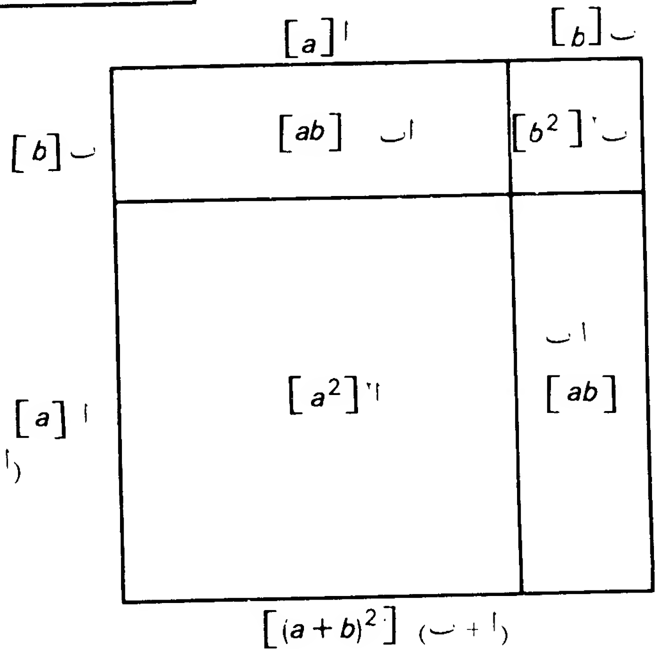
منظم العرض المباشر التالى الذى يقوم فى صورة عروض عملية يمكن أن يجعل حواصل الضرب (ا ± ب)٢، (ا ± ب)٣ $[(a \mp b)^2$ and $(a \mp b)^3]$ ذات معنى لكثير من الطلاب .

ابدأ العرض بإختيار طولين ا ، ب $[a$ and $b]$ وبين ان التمثيل الهندسى لكل من ا٢ ، ب٢ $[a^2$ and $b^2]$ عبارة عن مربعين ابعادهما ا × ا ، ب × ب $[a$ by a and b by $b]$ على الترتيب .
بعد ذلك اعتبر الطول ا + ب $a + b$ وانشىء مربعا بعداه (ا + ب)(ا + ب) $[(a + b)$ by $(a + b)]$

كتمثيل هندسى للمقدار (أ + ب)^{٢} [$(a + b)^2$] قارن المربع الذى طول ضلعه (أ + ب) [$(a + b)$] بالمربعين اللذين طولا ضلعيهما أ ، ب a and b (أنظر الشكل ٣ — ٢) .

قسمٍّ الفصل إلى مجموعات صغيرة واسأل كل مجموعة ان تنشىء تمثيلا هندسيا للمقدار الجبرى (أ + ب)^{٢} [$(a + b)^2$] وان يستخدموا هذا التمثيل ايجاد مفكوك (أ − ب)^{٢} [$(a - b)^2$]. بعض الطلاب قد يفضلون رسم الأشكال على الورق وبعضهم قد يقطع أوراقا على شكل مربعات ومستطيلات . وعلى المعلم ان يتأكد من وجود الأدوات اللازمة مثل مساطر للقياس ومقصات لقص الأوراق .

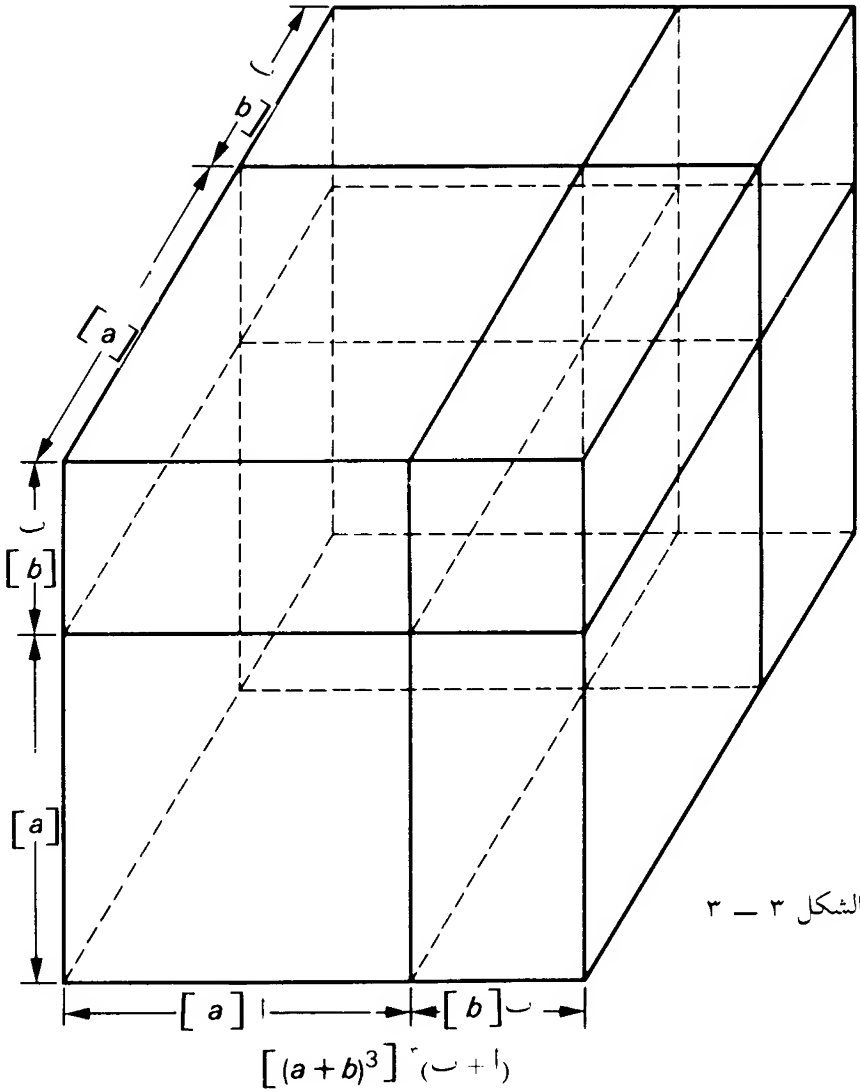




الشكل ٣ — ٢
(أ + ب)^{٢} [$(a + b)^2$]

بعد عرض (ا + ب)٢ ، (ا − ب)٢ [$(a + b)^2$ and $(a - b)^2$] عمليا ، يبدأ العمل للتمثيل الهندسى لمفكوك (ا + ب)٣ [$(a + b)^3$] (أنظر شكل (٣ — ٣) .

قد يفضل إستخدام مجسمات خشبية أو من البلاستيك لتمثيل هذا المفكوك . ويمكن استخدام مكعبات صغيرة ١ × ١ × ١،١ × ١ × ١ تلصق حتى تكون شكل متوازى مستطيلات بالأبعاد المطلوبة . ويمكن تجزىء التمثيل الهندسى لمفكوك (ا + ب)٣ [$(a + b)^3$] إلى أربعة أحزاء هى ا٣ ، ٣ا٢ب ، ٣اب٢ ، ب٣ [a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, and b^3] كما يتضح من الشكل (٣ — ٤) .



الشكل ٣ — ٣

ويمكن رسم كل تجزىء على شريحة شفافه ثم تستخدم السبورة الضوئية فى بيان أن ($ا + ب$)^{٣} = ا^{٣} + ٣ا^{٢}ب + ٣اب^{٢} + ب^{٣} [$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$] ثم تأكد من وضوح تلك العلاقة للطلاب .

بعد ذلك يناقش المعلم مع الفصل طرق تمثيل (ا − ب)^{٣} [$(a-b)^3$] وذلك بالرسم على الورق أو بإستخدام مكعبات مجسمة وعندما يصل الطلاب إلى التمثيل الصحيح سوف يكتشفون أن (ا − ب)^{٣} = ا^{٣} − ٣ا^{٢}ب + ٣اب^{٢} − ب^{٣} [$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$]

بعد استخدام المنظم المتقدم يطلب من الطلاب حساب حواصل ضرب معينة مثل (١ + ٤)^{٢} ، (١٦ − ٣)^{٢} ، (ل + ص)^{٢} ، (٣س − ٢ص)^{٢} ، (٢س − ٣ل)^{٣} [$(11+4)^2, (16-3)^2; (x+y)^2, (3x-2y)^2, (2r-3s)^3$] بإستخدام العلاقات التى اكتشفها فى حالتى (ا + ب)^{٣} ، (ا − ب)^{٣} [$(a+b)^3$، $(a-b)^3$]

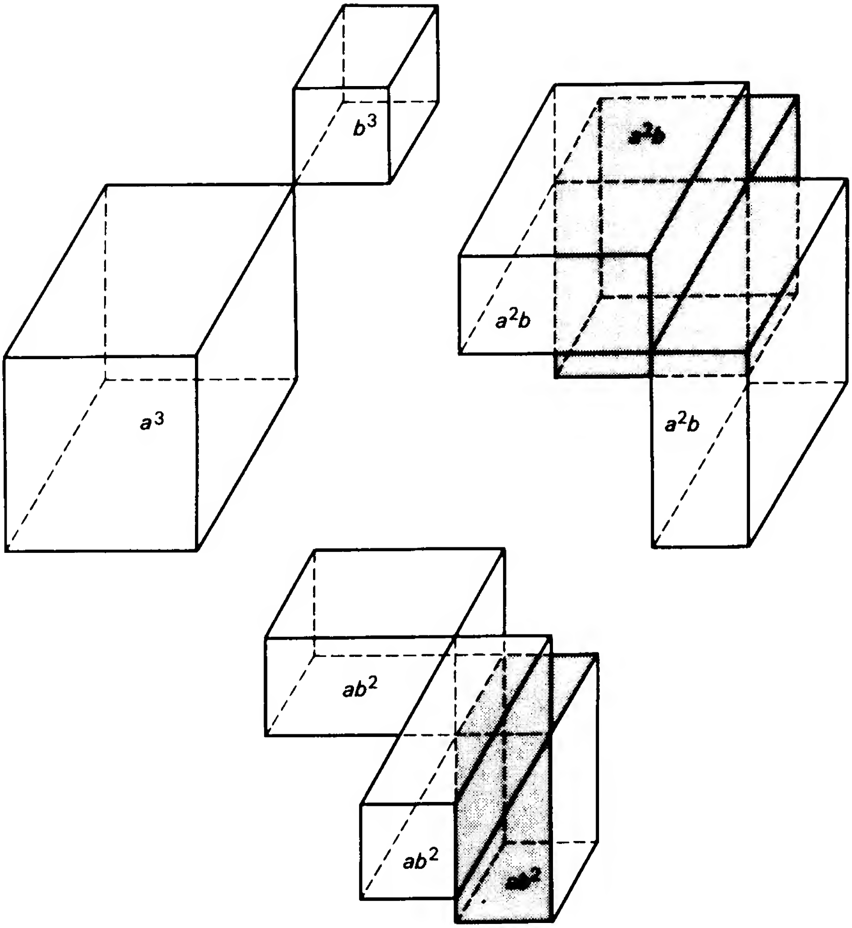
هذا المنظم المتقدم والذى يحتاج إلى حصة كاملة سوف يساعد الطلاب فى الأستعداد لدراسة مفكوكات معينة فى الجبر والإعداد لدراسة نظرية ذات الحدين .

ومن الواضح انه لا يمكن ايجاد تمثيل هندسى لمفكوكات (ا ± ب)^{ن} [$(a \mp b)^n$] فى حالة ن > ٣ [$n > 3$] . والمدخل لهذه المفكوكات هو البحث عن نمط مثل النمط الموجود فى مثلث بإسكال .

على الرغم من ان هذا المنظم على نفس مستوى التجريد والعمومية من الحالات الخاصة التى تليه إلا انه يساعد الطلاب على تكوين بنيه عقلية تنظم المفاهيم والمبادىء المتضمنة فى المفكوكات الخاصة .

التعلم بالاكتشاف

التدريس من اجل التعلم بالإكتشاف هو مدى من الاستراتيجيات أكثر منه نموذجا للتعليم والتعلم . والتعليم والتعلم بالاكتشاف ليس معرفا تعريفا كافيا حتى الآن بالدرجة التى تسمح بتكوين تتابع مرتب بين الأنشطة يسمى نموذجا للتعليم والتعلم بالاكتشاف لذلك فإن التعلم بالإكتشاف سوف يعرض هنا كمجموعة من الأهداف والانشطة والنتائج المحتواة فى مدى من استرايتجيات التدريس تسمى طريقة الاكتشاف .



a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, and b^3.

الشكل ٣ ــ ٤

وطريقة الاكتشاف محببه لدى مدرس الرياضيات . ذلك لأنها مرتبطة بنموذج العرض المباشر ومناسبة لتقديم مهارات ومفاهيم ومبادىء جديدة لمجموعة من الطلاب ، وتسمح بالكثير من مبادأة الطلاب واندماجهم فى الدروس . وتميل إلى كونها أكثر متعه للطلاب من المحاضرات التى يهيمن عليها المعلم . وعلى الرغم من أن طريقة الأكتشاف قد واجهت نقدا من بعض المربين مثل أوزوبل بالنسبه لفاعليتها فى تقديم مواد تعليميه ، إلا أنه يمكن استخدامها بكفاءه فى العديد من موضوعات الرياضيات .

تعريف التعلم بالاكتشاف

يمكن تعريف الاكتشاف – بصفة عامه ــ على أنه أى وسيله يكتسب بها شخص معرفة ما عن طريقة استخدام مصادره العقليه أو الفيزيقيه . وبالمعنى الضيق يعرف التعلم بالاكتشاف على أنه التعلم الذى يحدث كنتيجة لمعالجة المتعلم المعلومات وتركيبها وتحويلها حتى يصل إلى معلومات جديدة . فى التعلم بالاكتشاف يمكن ان يقوم المتعلم بتخمين أو يكون فرضا أن ويجد حقيقة رياضية بإستخدام عمليات الأستقراء أو الأستنباط وبإستخدام المشاهدة والاستكمال . العنصر الجوهرى فى اكتشاف معلومات جديدة هو انه يجب أن يلعب المكتشف دورا نشطا فى تكوين والحصول على المعلومات الجديدة . فمثلا عندما يخبر المعلم طالبا لم يسبق له معرفه بالموضوع ان عملية ضرب الأعداد الطبيعية ابداليه فإن الطالب هنا لم يكتشف خاصة الابدال فى عملية الضرب . ولكن الطالب الذى وجد عن طريق المحاولة والملاحظة أن أدوار المضروب والمضروب فيه يمكن أن يتبادلا فى مسائل الضرب يكون بذلك قد اكتشف خاصة الابدال . وقد يخطط المعلم لعملية الأكتشاف بأن يوفر المواقف التى تتمثل فيها هذه الخاصة أو يمكن ان يكون الطالب قد اكتشفها دون توجيه من المعلم .

يتم التعليم من أجل التعلم بالاكتشاف من خلال مدى من انشطة التعلم ينتج عنها اكتشافا يقوم به المتعلم . هذه الأنشطة يعدها ويتحكم فيها المعلم كما قد تأخذ هذه الأنشطة شكل الألعاب الحرة غير المقيدة أو قد تكون معالجات غير مخطط لها للأفكار والأشياء أو قد تكون مناقشات مفتوحة . ويمكن أن يحدث التعلم بالاكتشاف فى مواقف معدة إعداد بنائيا مثل تتابع من التفاعلات بين الطالب والمعلم أو بين الطالب وكتاب مبرمج حيث يوجه عمل الطالب خطوه تلو الخطوة وكما يأخذ صورة سؤال وإجابة حتى يصل الطالب باكتشافات غير مخطط لها فى مناقشات مفتوحة لمسائل ومشكلات يكونونها ويعالجونها دون تدخل من المعلم .

ويمكن أن تتم اكتشافات الطلاب عن طريق الإستقراء أو الإستنباط . **الاستقراء** هو عملية ايجاد تعميم نتيجة ملاحظة ومعالجة حالات خاصة تمثل هذا التعميم . ويمكن اكتشاف الكثير من التعميمات الحسابية عن طريق حل مجموعات من المسائل وملاحظة الخواص والإجراءات العامه المتضمنة فى كل المسائل . **الاستنباط** هو معالجة الأفكار من خلال استخدام قواعد المنطق من أجل تكوين تعميمات يمكن أن تطبق فى مجموعات معينة من المواقف . النتائج فى الهندسة وفى الفروع الأخرى من الرياضيات يمكن استنباطها بإستخدام قواعد المنطق لتحليل تضمينات معينة للنظريات . برهنه النظريات نفسها هى عملية استنباطية لأن برهان نظرية ما يتطلب اختيار وتنظيم منطقى لمجموعة من التعاريف والمسلمات والنظريات السابقة .

أهداف استراتيجيات الإكتشاف

هناك أربعة أهداف عامة للتعلم بالإكتشاف .

(١) يتعلم الطلاب من خلال اندماجهم فى دروس الإكتشاف بعض الطرق والأنشطة الضرورية للكشف عن أشياء جديدة بأنفسهم .

(٢) ينمى الطلاب اتجاهات واستراتيجيات تدريبية تستخدم فى حل المشكلات والاستقصاء والبحث .

(٣) تساعد دروس الاكتشاف الطلاب على زيادة قدراتهم على تحليل وتركيب وتقويم المعلمومات بطريقة عقلانيه .

(٤) هناك إثابات داخلية مثل الميل إلى المهام التعليمية والشعور بالمتعة وتحقيق الذات عند الوصول إلى اكتشاف ما ، وهذه تحفز الطلاب على التعلم بصورة أكثر فعالية وكفاءة فى حصص الرياضيات .

ومن بين الأهداف الخاصة والمحدده للتعلم بالاكتشاف والتى يسهل ملاحظتها وقياسها :

(١) يتوفر لدى الطلاب فى دروس الاكتشاف فرصة كونهم يندمجون بنشاط فى الدرس . ويزيد كثير من الطلاب درجة مشاركتهم فى الحصة عندما تستخدم استراتيجية الاكتشاف .

(٢) يتعلم الطلاب من خلال استراتيجيات الاكتشاف ان يجدوا انماطا فى المواقف المحسوسة والمجردة كما يتعلمون أيضا ان يصلوا إلى المزيد من المعلومات بأن يذهبوا إلى أبعد من البيانات المعطاه لهم .

(٣) يتعلم الطلاب صياغة استراتيجيات اثارة اسئلة غير غامضة وان يستخدموا الاسئلة للحصول على المعلومات المفيدة فى الوصول إلى اكتشافات .

(٤) تساعد دروس الاكتشاف الطلاب فى انماء طرق فعالة للعمل الجماعى ومشاركة المعلومات والاستماع إلى أفكار الآخرين وإستخدامها .

(٥) هناك بعض الشواهد التى تشير إلى ان المهارات والمفاهيم والمبادىء التى يتم تعلمها عن طريق الاكتشاف تكون أكثر معنى عند الطلاب وأكثر استبقاء فى ذاكرتهم .

(٦) المهارات التى يتم تعلمها عن طريق الاكتشاف تكون احيانا أكثر سهولة فى انتقال اثرها إلى أنشطة ومواقف تعلم جديدة .

طبيعة استراتيجيات الاكتشاف

المواقف التعليمية التى تساعد على التعلم بالإكتشاف

يمكن أن يحدث تعلم بالاكتشاف أثناء المحاضرات التى يلقيها المعلم وفى المناقشات الجماعية وخلال الأنشطة الجماعية وخلال التجارب المعملية وفى المواقف التعليمية المرنة . ومع ذلك فإن هناك احتمالات ضئيلة ان يقوم الطلاب باكتشافات عندما يسير الدرس بصورة محاضرة يلقيها المعلم دون مشاركة من الطلاب وعندما يكون الموقف داخل الفصل غير مسيطر عليه نهائيا .

فالطلاب لا يصلون إلى إلى اكتشافات أثناء محاضرة المدرس لأن مسئولية تناول المعلومات والأفكار ومعالجتها وتنظيمها وتحويلها تقع بكاملها على المدرس الذى يقدم هذه الأفكار فى صورها

النهائية . بينما يتطلب الاكتشاف الاندماج النشط للطلاب . فى المحاضرة لا يحاول الطلاب تحليل أو تقويم المعلومات التى يقدمها المعلم بل قد يهملونها أو مجرد يدونونها فى كراساتهم أو يختزنونها فى ذاكرتهم ونادرا ما يعيدون تنظيمها و يستخلصون منها معلومات جديدة . وحتى إذا ما حاول الطالب التفكير فى نقطة يقولها المحاضر فإنه ربما يتسبب ذلك فى عدم تمكنه من اللحاق ببقية المحاضرة وهذا فى حد ذاته يحبط اية محاولة لأعمال الفكر أثناء المحاضرة .

والمواقف غير المسيطرة عليها هى ايضا من العوامل التى يندر ان ينتج عنها أكتشافات يقوم بها الطلاب خاصة فيما يتعلق بمحتوى الرياضيات موضع الدراسة . لأن الطلاب قد لا يندمجون فى معالجة المعلومات المناسبة . وحتى عندما يحاول الطلاب التوصل إلى اكتشافات دون تدخل المعلم فإن هذه الاكتشافات — إذا حدثت — تتطلب وقتا كبيرا ربما كان من الأفض الاستفادة به فى أنشطة أخرى . وإذا ما ترك الطلاب لشأنهم تماما فربما يفشل الطلاب فى تكوين استراتيجيات منطقية لتحليل وتقويم المعلومات . كما انهم قد يتبعون طريقا مسدودا لا طائل من وراء السير فيه . ويحتاج الأمر إلى بعض التوجيه من المعلم بتشجيعهم على العمل فى مهام مطلوبة وعدم الاسنمرار فى أعمال لا طائل من ورائها والاهتمام بمهام تقود إلى اكتشافات رياضية مفيدة .

هناك احتمالات أكبر فى ان يصل الطلاب إلى اكتشافات فى المواقف التى يبدأ فيها المعلم الدرس بإعطاء بعض الخطوط الارشادية ويخطط للأنشطة التالية ويرشد الطلاب أثناء قيامهم بالأنشطة ويتدخل فى حالات الضرورة . لذلك فإن الاسترانيجيات التدريبية التى تحفز على التعلم بالاكتشاف هى استراتيجيات وسط فلا هى متطرفه ناحية الهيمنة الكاملة للمعلم على الدرس ولا متطرفه فى الاتجاه المضاد حيث الهيمنه الكاملة للطلاب .

استراتيجيات الاكتشاف الاستقرائى والاستنباطى

يمكن أن يحدث الاكتشاف بإستخدام استراتيجيات التعلم الاستقرائية أو الاستنباطية . فى حالة استخدام الاستقراء ، فإن التعميمات مثل خوارزميات حل المشكلات والمفاهيم والمبادىء تكتشف من خلال معالجة عدد من الحالات الخاصة لكل منها . ولكن الاستنباط يتضمن توظيف مبادىء المنطق للوصول إلى تعميمات يمكن عندئذ تقويمها بقصد الوصول إلى حالات خاصة أو تطبيقات لها . ففى الرياضيات تستخدم التعاريف والمسلمات مع مبادىء المنطق فى الوصول إلى النظريات ثم يبدأ البحث عن تطبيق لهذه النظريات . كذلك يتم البحث عن الطرق والإجراءات التى تضم فيها هذه النظريات منطقيا للوصول إلى نظريات جديدة لها تمثيلاتها وتطبيقاتها الخاصه بها .

توصف استراتيجيات الاكتشاف الاستقرائى بأنها الوصول من حالات خاصة إلى تعميمات ، واستراتيجيات الاكتشاف الاستنباطى بأنها الوصول من تعميمات إلى حالات خاصة وتعتبر هذه التعريفات تبسيطا للموقف . ان الخاصة المميزة لاستراتيجيات الاستقراء والاستنباط لا تكمن كثيرا فى الأشاء التى يبدأ وينتهى بها الشخص ولكنها تكمن فى الأجزاء المستخدمة فى الرحلة من الأشياء

التى يبدأ بها إلى الأشياء التى تنتهى إليها . فى استخدام استراتيجية الاكتشاف الاستقرائى فإن المتعلم يستخدم الحدس (مع بعض المنطق) لتكوين تعميم ناجم عن ملاحظات للخواص المشتركة الموجودة فى عدد من المواقف أو الأساليب أو طرق حل المشكلات المرتبطة بالموضوع . عندما تستخدم استراتيجية الأكتشاف الأستنباطى ، يستخدم المتعلم المنطق (وبعض الحدس) لتكوين تعميم مبنى على أفكار مجردة وتعميمات أخرى . بعد ذلك (وربما بعد ذلك بزمن بعيد) توجد أمثله وتطبيقات للتعميم المكتشف .

على الرغم من تعريف الاكتشافين الاستقرائى والإستنباطى كعمليتين مختلفتين ــ وذلك من أجل التوضيح ــ الآن معظم الاكتشافات الحقيقية تتم بإستخدام العمليتين معا . وهذا يدعونا إلى القول بأن استراتيجية الاكتشاف الإستقرائى هى الاستراتيجية التى يغلب عليها عمليات الإستقراء ، والاستراتيجية الاستنباطية هى التى يغلب عليها عمليات الإستنباط . والأمثلة التالية توضح ذلك :

فى التطور التاريخى للرياضيات ، أكتشف الفيثاغوريون (وربما غيرهم) من خلال الكثير من الملاحظات والقياسات أن مربع وتر مثلث قائم الزاوية يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين للمثلث . ومع ذلك فإنه يمكن الوصول إلى نظرية فيثاغورس بإستخدام العملية الأستنباطية . وفى الهندسة المستوية سواء التى تدرس الآن بالمدارس أو كما هى موضوعة فى كتاب الأصول لإقليدس ، تكتشف نظرية فيثاغورس استنباطا بمعالجات منطقية لمسلمات ونظريات معينة وبدون النظر إلى حالات خاصة .

من الطريف أن نلاحظ أن الهندسة الاقليدية ــ والمبنية جزئيا على مسلمة التوازى التى تنص على انه من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم وحيد يوازى المستقيم المعلوم ــ كانت معروفة حدسيا واستخدمت فى قياس الأراضى قبل ان تمت صياغتها كعلم استنباطى . ومع ذلك فالهندسات اللا إقليدية ــ التى تعتمد جزئيا على مسلمة فى التوازى تناقض مسلمة اقليدس ــ أنشئت كعلوم استنباطية قبل ان يعرف لها أمثله وتطبيقات بسنين كثيره .

دروس الاكتشاف

يمكن القيام بدروس الاكتشاف من خلال طرق عرض موجهه من المعلم أو من خلال أنشطة معملية متمركزة حول الطالب . يمكن للمعلم ــ فى بعض دروس الأكتشاف ــ ان يختار أنشطة تتطلب أن يسنحدم الطلاب عمليات استقرائية ، وان يختار أنشطة تتطلب استخدام الطلاب لعمليات استنباطية فى دروس أخري . وفى دروس أخرى ربما يحتاج الأمر أستخدام العمليات الأستقرائية والأستنباطية معا .

على الرغم من أن المحاضرات البحتة التى يلقيها المعلمون نادرا ما تشجع الطلاب على الأكتشاف ، إلا أن التدريس بالعرض المباشر مع تكرار الاسئلة من المدرس والتفاعلات مع الطلاب يمكن أن تثير بعض الاكتشافات عند الطلاب . وعند استخدام العرض المباشر لتحفيز الاكتشاف يكون دور المعلم

هو دور المرشد أو قائد المناقشات ولكن عليه الا يقدم المعلومات جاهزة بنفسه ، فعلى المدرس آن يشجع مناقشة الأفكار بين الطلاب ويوجهها الوجهه المثمرة ولا يشجع المناقشات التى يعلم أنها لن تصل بهم إلى نتيجة . وعندما يرشد المعلم درسا من أجل الإكتشاف فعليه ألا يبنيه بطريقة صماء لا تسمح بالمرونه ولا بدون إشتراك الطلاب وتجعلهم مجرد مستغلين فقط للخطوات التى يقدمها المعلم . وفى نفس الوقت لا يصح أن يترك المعلم الحبل على الغارب بدون توجيه أو خطوط ارشادية للمناقشات . ولكن قد يبدأ المعلم فى دروس الأكتشاف عن طريق العرض — بمراجعة المعلومات المناسبة وتقديم مواقف تقود إلى الاكتشاف المرغوب ويضع خطوطا ارشادية للمناقشات التالية . ويجيب المعلم على اسئلة الطلاب ويلقى اسئلة تفتح الطريق أمام الطلاب عندما يجد أن مناقشتهم غير مجديه بعد ان يصل الطلاب إلى الاكتشاف المستهدف يجب على المعلم أن يساعدهم فى صياغته فى عبارات مفهومة ومفيدة وأن يختبروا مدى صلاحيته وان يدمجوه مع المعلومات السابقة المرتبطة به . ويتبع هذه الأنشطه تمارين وتطبيقات لما تم اكتشافه . وإذا سيطر المعلم وتحكم كثيرا فى درس الاكتشاف فإن مشاركة الطلاب قد تحبط كما أن الدرس كله قد يتحول إلى لعبة يحاول فيها الطلاب التخمين عما يفكر فيه المعلم . كما أن التدخل الضئيل من المعلم قد ينتج عنه تقدم قليل نحو الأكتشاف . إن الدور المثالى للمعلم هو أن يكون مرشدا وموجها وليس محاضرا ولا منعزلا .

كما أشرنا سابقا أن دروس الاكتشاف يمكن أن تتم من خلال استراتيجية العرض المباشر المصحوب بمشاركة الفصل كمجموعة . كذلك يمكن أن يكتشف الطلاب أشياء رياضية من خلال عملهم فى مجموعات صغيرة أو فرادى فى تداريب معملية . وفى حالات العمل الفردى أو فى مجموعات صغيرة فإنه على المعلم أن يعد مقدما التعليمات التى تمكن المجموعات الصغيرة والأفراد من العمل المستقل . ففى حالة المعمل مثلا يجب اعداد أوراق العمل أو الأجهزة والادوات اللازمة للأنشطة المعملية وأن تكون التعليمات واضحة للطلاب حتى لا يختلط الأمر على الطلاب عن المهام المطلوبة منهم ولكن يجب ألا تكون هذه التعليمات مفصلة بالدرجة التى لا تجعلهم هم الذين يصلون إلى الإكتشافات المستهدفة . يجب أن تمد أوراق العمل الطلاب بتعليمات تمكنهم من تحليل الأنشطة التى يقومون بها وتقويم للنتائج حتى يتمكنون من الوصول إلى خبرات يكتشفونها بأنفسهم من خلال تلك الأنشطة .

عند استخدام العمليات الاستقرائية ، يجب على المعلم أن يوفر أمثلة عديدة ومتنوعة للتعميم المستهدف اكتشافه وأن يوفر لا أمثلة من الوقاية من التوسع الخاطىء والتصميم وحتى يتبين حدود التعميم الذى يصل إليه . وعند استخدام العمليات الاستنباطية فلابد وأن تستخدم مع طلاب وصلوا فى مراحل نموهم العقلية إلى مراحل العمليات الشكلية (بحسب نظرية بياجية) حتى يكون الطلاب مجهزين عقليا بالقدرة على نركيب تعميمات معروفة والوصول منها إلى تعميمات جديدة تفيد دروس الاكتشاف الاستنباطى عندما تستنتج نظريات جديدة من تعاريف ومسلمات ونظريات أخرى أو عند البرهنة على النظريات . وحيث ان الاكتشافات الأستنباطية تتطلب استخدام المنطق الرياضى والتعليلات المجردة ، فإنها أصعب من الاكتشافات الاستقرائية وتتطلب وقتا أكبر وربما يكون فرص حدوثها أقل .

وفيما يلى بعض الارشادات والأنشطة التى يمكن تضمينها فى دروس الاكتشاف فى العرض المباشر أو الأنشطة العملية :

(١) يمكن تقديم اسئله ومشكلات ومواقف محيرة لتحفيز الأنشطة التى تقود إلى الاكتشاف .

(٢) يمكن تحليل الخوارزميات والمهارات الرياضية لاكتشاف المفاهيم والمبادىء الرياضية العامة التى وراءها .

(٣) يجب أن يبدأ كل درس اكتشاف بمعلومات معروفة ويتقدم خطوة فخطوة إلى المعلومة الجديدة والاكتشافات العامه .

(٤) يجب أن تستخدم استراتيجيات التقويم القبلى للتعرف على مدى امتلاك الطلاب للمفاهيم والمبادىء المتطلبة لعمل استكشاف استقرائى أو استنباطى متوقع .

(٥) من المهم مراعاة التوقيت المناسب لتدخل المعلم فى مواقف التعلم بالاكتشاف ، فلا تقدم المعلومات المعاونة قبل استعداد الطلاب لاستخدامها بل تترك لهم الفرصة لتقييم ورفض التحركات غير المنتجة ويسمح لهم ان يختبروا بأنفسهم الطرق والإجراءات التى يستخدمونها . وعلى المعلم ان يبتعد عن التدخل الذى قد يوقف الطلاب عن المشاركة الإيجابية كما انه لابد وان يمتنع عن ان يجعل الاكتشاف المتوقع واضحا تماما بحيث يصل إليه الطلاب دون جهد منهم .

(٦) ينبغى أن يسمح المعلم بأن يقوم الطلاب بالاكتشافات بطرق متعددة وأن يوفر الفرص لاكتشافات بديلة ويقبلها .

(٧) من الصعب اكتشاف التعاريف والبديهيات والمسلمات والرموز . والدروس التى تصمم لاكتشافها ما هى إلا لعبة عن « خمن فيمَ أفكر »

(٨) تفيد النماذج المفاهيمية والنماذج الفيزيقيه والألعاب والأدوات لحفز الاكتشافات .

(٩) من الممكن ان تكون استراتيجيات الاكتشاف استهلاكية للوقت ومحبطة للطلاب وذلك اذا أسيء استخدامها أو أفرط فيه .

(١٠) الاسئلة القيادية والارشادات المفتاحية يمكن ان تستخدم كمحفزات عندما تتعثر دروس الاكتشاف . غير ان المعلومات الكثيرة قد تحجب التعميمات وتجعل الطلاب يركزون فقط على التفصيلات دون الوصول إلى اكتشاف تعميمات .

(١١) ينبغى ان يسمح للطلاب ان يختاروا أسئلتهم وأنشطتهم التى قد تكون مفيدة فى عملية الاكتشاف ، وان يشجعوا على اختبار الاكتشافات المؤقتة فى ضوء الحقيقة وفى ضوء آراء ومعارف زملائهم بدلا من الاعتماد التام على المعلم على انه المصدر الوحيد للمعرفة .

(١٢) فى كثير من الأحيان يكون العمل فى مجموعة وليس العمل الفردى أفضل فى الوصول إلى الاكتشافات وذلك لأن الجماعة تمد بوفرة من الأفكار واوجه النقد . ومع ذلك فإنه لابد من تشجيع واثابة الأفراد الذين يسهمون بإفكارهم ومعلوماتهم المثمرة فى المناقشات والوصول إلى أفكار واكتشافات جديدة .

نتائج دروس الاكتشاف

ينقص التعلم بالاكتشاف تعريف مقنن شائع القبول فى الاوساط التربوية . ليس هذا فحسب بل انه ينقصه مجموعة مقبولة من النواتج . فقد اجريت بعض الدراسات للمقارنة بين أثر التعلم بالاكتشاف على تحصيل التلاميذ وبين طرق أخرى . وكانت نتائج هذه الدراسات غير حاسمة عند النظر إلى متوسطات المجموعات وذلك كما ذكر بيتنجر Bittinger فى مراجعة للأبحاث التى أجريت عن الاكتشاف عام ١٩٧١ . ومع ذلك هناك بعض الشواهد التى تؤشر بأن طريقة الاكتشاف قد تزيد الدو افع . ويبدو أنها يمكن أن تكون مدخلا فعالا فى تدريس بعض الموضوعات الرياضية ، ولكنها ليست ظاهرة تربوية .

بعض الجوانب السلبية المحتملة فى التعلم بالاكتشاف هى عدم وجود نظام محدد يعمل على تصحيح مسار الطلاب فى حالة وصولهم إلى نتائج خاطئة أو أكتشافات غير صحيحة أو وحتى عدم وجود اكتشافات نهائيا ، واستغراق وقت أكثر مما تستغرقه الطرق الأخرى ، كما أن الطلاب المتعودين على المداخل المتمركزة حول المعلم قد يواجهون باحباطات نتيجة عدم قدرتهم على تحمل مسئولية الوصول إلى اكتشاف تعميمات بأنفسهم .

وقد وضع روبرت دافيس Davis مجموعة من الأهداف لمشروع ماديسون لتدريس الرياضيات بإستخدام استراتيجية الاكتشاف نوردها فيما يلى :

(١) نرغب فى اعطاء الطلاب خبرة فى اكتشاف انماط فى المواقف المجردة .
(٢) نرغب فى اعطاء الطلاب خبرة فى التعرف على المواقف المفتوحة ، وتوسيعها من خلال اعمال اصيلة مبدعه .
(٣) نرغب ان يكون الطلاب على دراية ومعرفة بالمفاهيم الأساسية للرياضيات .
(٤) نرغب ان يبنى الطلاب خيالا عقليا مناسبا .. يسمح لهم بآداءات عقلية تتضمن الأفكار الأساسية فى الرياضيات .
(٥) نرغب ان يكتسب الطلاب من درجة مناسبة من التمكن من اساليب الرياضيات .
(٦) نرغب ان يعرف الطلاب الحقائق الأساسية فى الرياضيات .
(٧) نرغب ان يكتسب الطلاب ميسرة فى الربط بين أجزاء الرياضيات .
(٨) نرغب ان يمتلك الطلاب مهارات سهلة فى ربط الرياضيات بتطبيقاتها فى الفيزياء والمجالات الأخرى .
(٩) نرغب ان يتكون لدى الطلاب شعور حقيقى تجاه تاريخ الرياضيات .
(١٠) نرغب ان يعرف الطلاب ان الرياضيات قابلة للاكتشاف .
(١١) نرغب ان يصل كل طالب ــ كجزء من مهمة ان يعرف نفسه ــ إلى تقويم واقعى لقدراته الشخصية فى اكتشاف الرياضيات .
(١٢) نرغب اى يقدر الطلاب قيمة « الحدس التربوى » فى موقعه الصحيح .

(١٣) نرغب ان يقدر الطلاب قيمة التحليل العقلانى فى موقعه الصحيح .
(١٤) على قدر الأمكان نرغب ان يعرف الطلاب متى يثابرون ويصرون ومتى يكونون مرنين .
(١٥) نرغب ان يشعر الطلاب بأن الرياضيات متعة واثاره عقلية وانها ذات قيمة عالية .

خطة لدرس فى الاكتشاف

يمكن أن يكتشف الطلاب الكثير من خواص النظم الرياضية البنائية بعد أن يكونوا قد تعرفوا على عناصر وعملية البناء . ونعرض فيما يلى خطة لدرس موضوعه الحساب (مقياس ١٢) والذى يسمى « حساب الساعة » بإستخدام استراتيجية الاكتشاف .

المحتوى الرياضى

الخبرات المستهدفة هنا المبادىء والقوانين المتعلقة بحساب الساعه . ولابد أن يكون قد سبق للطلاب دراسة نظم العد بتجميعات مختلفة وأن يكونوا قد أدركوا معنى العملية الرياضية ومفاهيم الابدال والدمج والتوزيع والعنصر المحايد الجمعى والضربى والمعكوس والإنغلاق . ويمكن أن يدرس هذا الموضوع قبل دراسة الزمرة .

أهداف التعلم

الأهداف المعرفية :

- أن يعرف ويفهم الطلاب مهارات حساب الساعة
- أن يحلل ويركب الطلاب حقائق الجمع والضرب فى حساب الساعة
- أن يكتشف الطلاب المبادىء العامة لحساب الساعة

الأهداف الوجدانية :

- أن يرغب الطلاب فى المشاركة فى التعلم بطريقة الاكتشاف
- أن يشعر الطلاب بالاشباع والمتعة أثناء اكتشاف الخواص المستهدفة

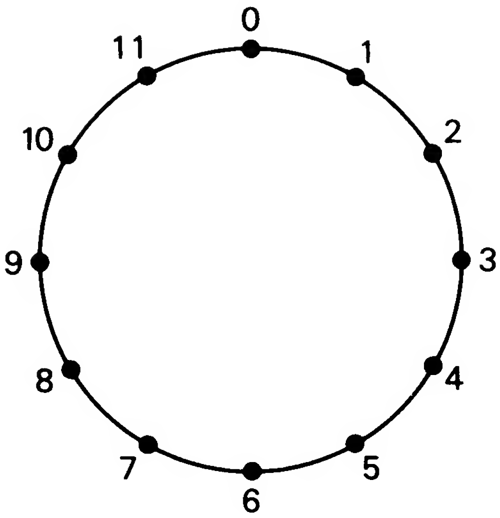
ويجب مناقشة هذه الأهداف مع الفصل قبل بداية الدرس

وسائل التعلم

ملصقات أو شرائح شفافة تحتوى على شكل يمثل الساعة ، أوراق نشاط ، بالإضافة إلى الأدوات العادية مثل القلم والورقة والسبورة .

استراتيجيات التقويم القبلى

تجرى مناقشة قصيرة لمراجعة معنى العملية الرياضية ومفاهيم الإبدال والدمج والتوزيع والعنصر المحايد والمعكوس والانغلاق ، ثم اختبار قصير شفوى أوتحريرى يسأل فيه الطلاب عن معنى تلك المفاهيم وأن يعطوا أمثلة لها .



الشكل ٣ ــ ٥

استراتيجيات التعليم والتعلم

يبدأ الدرس بعرض الشكل الذى يمثل الساعة ويشرح المعلم أن العدد (١٢) قد استبدل على الساعة بالعدد (٠) حتى يكون لحساب الساعة معكوس جمعى للصفر .

للتأكد من معرفة طريقة الجمع والطرح يجرى المعلم فترة من الاسئلة والأجوبة مع الطلاب مثل : أوجد ٣ + ٩ ، ٩ + ٧ ، ٤ × ٨ ، ١١ × ٩ وتجرى مناقشة مع الطلاب حتى يتأكد المعلم أن كل طالب يفهم قواعد حساب الساعة وأهمها أن الأعداد الوحيدة التى تستخدم هى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ١١ وأن العدد الذى يلى (١١) هو الصفر ثم ١ ، ٢ ، . . . ، ١١ .

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

يقسم الفصل إلى مجموعات حجم كل منها ٣ أو ٤ طلاب . ويعطى كل طالب فى كل مجموعة ورقة نشاط لاستكمال جدول جمع (مقياس ١٢) وجدول ضرب (مقياس ١٢) ، ويطلب منهم إجابة الأسئلة الموجودة على الورقة داخل المجموعات بدون مساعدة المعلم إلا فى حالات الضرورة القصوى .

(١) استكمل جدولى الجمع والضرب ($^{+}$١٢ ، $^{\times}$١٢) بنظام حساب الساعة
(٢) هل توجد اية أنماط فى جدولى الجمع والضرب ؟
(٣) هل مجموعة أعداد حساب الساعة مغلقة بالنسبة لعملية الجمع ؟ بالنسبة لعملية الضرب ؟
(٤) راجع نتائجك فى الجدولين للتأكد من صحتها .
(٥) هل يوجد عنصر محايد حجمى ؟ ضربى ؟ — ما هو ؟
(٦) هل عملية الجمع $^{+}$١٢ إبدالية ؟ هل عملية الضرب $^{\times}$١٢ ابدالية ؟ كيف عرفت ذلك ؟
(٧) هل عملية الجمع دامجة ؟ هل عملية الضرب دامجة ؟— لماذا ؟
(٨) هل يوزع الجمع على الضرب ؟ هل يوزع الضرب على الجمع ؟ لماذا ؟
(٩) هل يوجد معكوس جمعى ؟ ضع قائمة تحتوى على كل أعداد الساعة مقرونة بمعكوساتها الجمعية .
(١٠) هل لكل عدد معكوس ضربى ؟ ضع قائمة تحتوى على كل أعداد الساعةمقرونة بمعكوساتها الضربية .
(١١) هل يمكنك تعريف « الطرح » فى حساب الساعة ؟ — اذا كنت تعتقد ذلك فإنشىء جدولا للطرح . تذكر أنه لا توجد أعداد سالبة على الساعة .
(١٢) هل يمكنك تعريف « القسمة » فى حساب الساعة ؟— اذا كنت تعتقد ذلك فإنشىء جدولا للقسمة .تذكر أنه لا توجد أعداد كسرية على الساعة .
(١٣) لعلك ترغب فى بحث خواص عمليتى الطرح والقسمة وما إذا كانت مغلقة أو إبدالية أو دامجة ، أو إحداها توزع على الأخرى ، أو أنه يوجد لها عنصر محايد أو معكوس — (إبحث ذلك
(١٤) هل يمكنك اكتشاف أشياء أخرى فى حساب الساعة ؟

لعل المعلم يلاحظ هنا أن لمعظم هذه الأسئلة إجابات إيجابية ، ولكن لبعضها إجابات سلبية . فمثلا بعض أعداد الساعة ليس لها معكوس ضربى وبالتالى فإن القسمة ليست معرفة فى حساب الساعة ، فالعدد ٦ — على سبيل المثال — ليس له معكوس ضربى ، حيث انه لا يوجد عدد من أعداد الساعة يضرب فى ٦ ويكون الناتج « ١ » (المحايد الضربى) . وقد أضيف السؤال (١٤) لتوضيح أن عملية الاكتشاف عملية مفتوحة ، حيث يمكن للطلاب اكتشاف أشياء بأنفسهم دون وجود سؤال محدد يقودهم إلى ذلك .

يعطى الطلاب واجبا منزليا يطلب فيه منهم أن يبحثوا الحساب (مقياس ٣) ، ومقياس (٤) وأن يجيبوا على أسئلة مماثلة للأسئلة التى أعطيت على ورقة النشاط الخاصة بحساب الساعة (مقياس ١٢) وسوف يكتشف الطالب أنه يوجد معكوس ضربى لكل عنصر من عناصر الحساب مقياس (٣) ، وهذا لا يتوفر فى الحساب مقياس (٤) . وفى الحقيقة فإنه فى حالة ما يكون المقياس عددا أوليا ، يكون النظام كل خواص الحقل الرياضى . ولكن الأمر غير صحيح إذا كان المقياس عددا غير أولى .

وتقويم نجاح استراتيجية التدريس هذه يرتبط بنجاح الطلاب فى استكمال ورقة النشاط بطريقة صحيحة ونجاحهم فيما يعطى لهم من واجبات منزلية .

ومن الواضح أن هذا الدرس فى الاكتشاف هو درس فى الاكتشاف الموجه ، فهو يعتمد إلى حد ما على المعلم ؛ إذ أن الطلاب لم يقوموا بصياغة الأسئلة بأنفسهم ولكن المعلم هو الذى صمم ورقة النشاط ووضع الأسئلة وخطط تتابع العمل .

استخدام الألعاب فى تعلم الرياضيات

على الرغم من إستخدام الألعاب فى كثير من حصص الرياضيات إلا أن إستخدامها مازال يختلف من معلم لآخر ، كما أن طريقة الاستخدام غالباً لا يكون مخططا لها بل عفوية .

ومن الواضح أن الهدف الوجدانى ، وهو الحصول على المتعة والاشباع ، الناشىء عن الألعاب فى الرياضيات يتحقق . ولكن الأهداف المعرفية لكثير من الألعاب تظل غامضة أو منعدمة . وهذه حقيقة واضحة من وضع الألعاب فى حصص الرياضيات حيث يستخدمها المعلمون فى معظم الأحيان كنوع من الإثابة لتلاميذهم أو لمجرد ملء الفراغ أو شغل الطلاب داخل الفصل . ولكن هذا لا يدعونا إلى اتهام كل الألعاب الرياضية . فالألعاب التى تصمم لأهداف تعلم معينة وتستخدم بطريقة صحيحة بواسطة المعلمين والطلاب يمكن أن تكون وسيلة فعالة لزيادة التعلم . وتتوقف أهمية اللعبة الرياضية على النظرة التى ينظرها لها المعلم والتخطيط الذى يضعه لاستخدامها ، فالدرس الذى يستخدم فى الألعاب يحتاج إلى قدر من التخطيط لا يقل عن التخطيط لأى درس آخر . لابد من تحديد الخبرات الرياضية المتجسدة فى اللعبة . ومن اللازم تحديد الأهداف المعرفية والوجدانية للعبة ومشاركة الطلاب فى ذلك . وعند الضرورة تستكمل اللعبة بوسائل أخرى يكون معَداً لها مسبقا . ويسبق اللعبة تقويم قبلى للتأكد من استعداد الطلاب لتعلم اللعبة ولفهم محتواها الرياضى ، إذ أن قواعد بعض الألعاب قد يصعب فهمها من بعض الطلاب . كذلك لابد من إستخدام استراتيجيات للتقويم البعدى لتقويم مدى فعالية اللعبة فى تحقيق الأهداف التى وضعت لها .

الأهداف التربوية ومحددات إستخدام الألعاب

تأتى الأهداف الوجدانية فى مقدمة أهداف استخدام الألعاب من حيث أنها تزيد دافعية الطالب للتعلم . يرغب معظم الطلاب فى القيام بألعاب فى الرياضيات بدلا من قيامهم بأنشطة أخرى لا يميلون إليها بنفس الدرجة ، وهذا يعنى رغبتهم فى استقبال ما تحويه اللعبة من معلومات رياضية . ولكى يلعب الطلاب لابد وأن يكون لديهم الرغبة فى الاستجابة ، وفى هذه الحالة فإن المشاركة فى اللعب ينتج عنه إشباع ومتعة فى الاستجابة . فى كثير من الألعاب تنظم قواعدها هرميا بحيث تكون بعضها أهم من البعض الآخر ، وبالتالى فإنه يجب على اللاعبين أن يتقبلوا هذا الترتيب القيمى . وتتضمن بعض الألعاب قيما تعليمية أخرى مثل اتخاذ المبادرة والتنافس (البرىء) والعمل الجماعى وإحترام آراء الآخرين والتحلى بالروح الرياضية . كما يمكن أن يساعد اللعب الجيد فى تنظيم مثل تلك القيم فى منظومة قيمية . وهناك ألعاب فى المواد الاجتماعية تهدف إلى تنمية المهارات الحسابية وتمكين الطلاب من تطبيق الرياضيات فى حل مشكلات فى مجالات أخرى غير الرياضيات .

ويمكن أن تستخدم كثير من الألعاب لتحقيق أهداف معرفية فى الرياضيات وذلك عندما تتطلب استخدام مهارات حسابية أو جبرية أو هندسية . كذلك يمكن أن تستخدم الألعاب الرياضية فى حصص المراجعة من خلال ألعاب تتضمن الخبرات الرياضية المستهدف مراجعتها .

وبصفة عامة تعتبر الألعاب معينات لتعلم الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء المحددة . من خلال العديد من الأهداف المعرفية المتنوعة من تذكر وفهم وتطبيق وتحليل وتركيب وتقويم بما تتضمنه من استراتيجيات وقواعد للفوز على الآخرين . ومن بين الخبرات غير المباشرة التى يمكن أن تسهم الألعاب فى تعلمها : مهارات حل المشكلات ، انتقال أثر التعلم وتنمية القدرات العقلية العامة وتعلم كيفية التعلم . وتساعد الألعاب المبنية على الكومبيوتر والمحاكاة على تحسين قدرات الطالب لتعلم الخبرات الرياضية المباشرة .

ورغم إمكانية أن تكون الألعاب أنشطة فعالة فى تعلم الرياضيات إلا أنها لها حدود ومحددات مثل أى استراتيجية أو نموذج آخر للتعليم والتعلم . فالألعاب يمكن أن تكون فعالة إذا ما أحسن حسن إستخدامها . ولابد من الحذر حتى لا يتحول الأمر إلى مجرد فوز وخسارة . مما قد يؤدى إلى حالات من التوتر بين اللاعبين أو سلبية الخاسرين وهروبهم من المشاركة . كما قد يتحول الهدف إلى مجرد الفوز وليس الحصول على أهداف رياضية معرفية .

ومن بين محددات استخدام الألعاب النظرة العامة إليها على أنها نشاط ترويحى وليس عملا جادا . ومن ناحية أخرى قد ينغمس بعض الطلاب فى اللعب بالدرجة التى لا يرغبون فيها فى التعلم عن غير طريق اللعب .

استراتيجيات لاستخدام الألعاب

من المهم أن يختار المعلم ، أو يبتكر ، ألعابا تتضمن أهدافا وجدانية ومعرفية ، وأن يستخدم كل لعبة فى موقعها وتوقيتها المناسب من مقرر الرياضيات حتى يكون لها مردود رياضى له قيمته . وإذا كانت اللعبة جديدة فعلى المعلم أن يتعلمها بنفسه أولا ويتقن قواعدها ويقومها قبل استخدامها فى الفصل وذلك حتى يمكنه الحكم على مدى مناسبتها للطلاب وللموضوع وللزمن المخصص لها . ومن الطبيعى ألا يختار المعلم ألعابا تكون قواعدها معقدة بدرجة أكبر مما تتضمنه من خبرات رياضية . ويمكن عند اللزوم أن يبسط المعلم ويعدل قواعد لعبة ما لتتفق مع أهداف ومواقف معينة .

ويمكن للمعلم أن يشجع الطلاب على ابتكار لعب وتعديل قواعد لعب جاهزة . وقد يعطى المعلم بعض الخطوط الإرشادية للطلاب مثل ضرورة أن تكون للألعاب التى ينشئونها أو يعدلون فيها أهداف رياضية ومرتبطة بموضوعات مقررة عليهم فى الرياضيات وأن تخضع للشروط المناسبة لاستخدامها كألعاب تعليمية . ويتعلم الطالب من اللعبة التى يبتكرها بنفسه أكثر مما يتعلمه من اللعب الجاهزة .

إن تدريس الطلاب كيفية ممارسة اللعبة يقتضى أن يعد المعلم خطة درس قصير لتدريس قواعد اللعبة ولابد من التأكد من مناسبة اللعبة لمستوى الطلاب وموضوع الدرس ومن فهم الطلاب لقواعدها قبل البدء فى ممارستها . وعندما تتطلب اللعبة فرقا من اللاعبين ، فلابد ان يراعى المعلم توزيع الطلاب من ذوى القدرات المختلفة لإحداث توازن بين الفرق المتنافسة بالنسبة لقدراتهم وإهتماماتهم . ومن الأفضل ألا يترك قائد كل فريق أن يختار أعضاء فريقه حتى يمكن السيطرة على عدالة توزيع الأعضاء بين الفرق المتنافسة .

ويلعب المعلم دور الوسيط والحكم أثناء اللعب حتى تسير اللعبة باتجاه تحقيق أهداف التعلم الموضوعه لها . وعليه ان يشجع كل طالب للمشاركة فى اللعب كل محاولة للهيمنه أو السيطره على اللعبة من جانب قله من الطلاب . وعلى المعلم أيضا ان يحافظ على الانضباط داخل الفصل بدرجة متوازنة لا تمنع حرية الطلاب ولا تسبب فوضى أو إزعاج للفصول الأخرى وأن يضع سلوك الطلاب أثناء اللعب فى الاعتبار عند التقويم . وأهم من كل ذلك أن يعامل المعلم الألعاب كاستراتيجيات جادة وصالحة وهامة بالإضافة إلى أنها وسائل مسليه وممتعه لتعلم الرياضيات . ويرى البعض أنه حتى ولو لم يتعلم الطلاب أية رياضيات من خلال لعبة معينة فإن اللعبة لاتزال طريقة جيدة للدافعية إذا ما استمتع الطلاب بلعبها ولكن هذا الرأى مخادع إذ أن الطلاب قد يتحفزون فقط للعب ولكنهم لا يربطون استمتاعهم باللعب مع تعلم الرياضيات . وهناك وفرة فى الألعاب الرياضية الممتازة المستخدمة وعدد غير محدود من الأفكار لألعاب رياضية أخرى مما يجعل الفرص كثيرة لاختيار ألعاب تساعد على تعلم الرياضيات وعلى الدافعية للتعلم . وكقاعدة هامة ما لم يكن للعبة أهداف قوية فى تعلم الرياضيات وما لم تكن مسلية وممتعة فلا تستخدمها فى حصص الرياضيات .

تقويم الألعاب

بالنسبة لأية استراتيجية ، إذا فشل الطلاب فى تحقيق أهداف التعلم الموضوعة لأحد الدروس فإن الدرس يكون فاشلا ويجب على المعلم ان يقومه . للتعرف على اوجه القصور . ومع ذلك حتى إذا نجح الطلاب نسبيا فى تحقيق أهداف الدرس فإنه يظل هناك أهمية لتقويم استراتيجية التدريس للتعرف على العوامل التى يمكن تحسينها . والاسئلة التالية تعطى خطوطا إرشادية لتقويم بعدى لاستراتيجيات الألعاب للتعليم والتعلم :

(١) هل كانت قواعد اللعبة واضحة للطلاب ؟

(٢) هل احتاج تعلم القواعد وقتا طويلا ؟

(٣) هل كانت القواعد معقدة وطويلة بدرجة أبطأت من تقدم اللعبة ؟

(٤) هل بدت اللعبة للفصل وكأنها غبية جدا أو صعبة جداً ؟

(٥) هل صممت اللعبة بحيث تسمح بمشاركة كل الطلاب ؟

(٦) هل انشغل كل طالب بتقدم السير فى اللعبة ؟

(٧) هل استمتع الفصل باللعبة ؟

(٨) هل تسببت اللعبة فى مشكلات الانضباط داخل الفصل ؟

(٩) هل الاندماج المفرط فى اللعبة أعاق تحقيق أهداف التعلم ؟

(١٠) هل كانت خبرات التعلم المتجسدة فى الوحدة واضحة أثناء اللعب ؟

(١١) هل استجاب الطلاب للأهداف المعرفية المتعلقة بالرياضيات فى اللعبة ؟

(١٢) هل كان آداء الطلاب فى التقويم البعدى جيدا فيما يتعلق بتعلمهم الرياضيات ؟

أنواع الألعاب

هناك الكثير من الألعاب المرتبطة بالرياضيات . فكل لعبة تتطلب استراتيجية منطقية أو عملية عشوائية أو عمليات حسابية تعتبر لعبة رياضية . ويعتبر هذا تعميما واسعا لتعريف اللعبة الرياضية ، لأنه لا يمكننا من تصنيف الألعاب واختيارها بناء على أهداف رياضية معينة قابلة للقياس . وفى هذا الكتاب تعرف **اللعبة الرياضية** على أنها أية وسيلة لعمل ممتع لها أهداف رياضية معرفية معينة قابلة للقياس وأهداف رياضية وجدانية محددة يمكن مشاهدتها .

وهناك بعض الألعاب الرياضية التجارية وبعض الألعاب التى يبنيها المعلمون أنفسهم تحقق القليل من الأهد ـب المرتبطة بتعلم الرياضيات رغم أنها مسلية وممتعة . ومن أمثلة ذلك الألعاب التى تقتضى البحث عن أعداد تحل محل الحروف فى كلمات مثل : SEND x MORE = MONEY, ومثل : EVE DID = TALK TALK TALK وهذا نوع كثير الاستخدام كألعاب رياضية . ولكن يصعب فيها التعرف على أهداف رياضية معرفية ذات قيمة تذكر وذلك على الرغم من كونها مسلية . ولكن هناك

ألعاب مثل « أوجد عددا بحيث إذا أضيف إليه مجموع أرقامه كان الناتج ٧٣ »* . وهذه لعبة مناسبة لدرس فى الرياضيات لانها مثال فى المعادلات الديوفانتية (غير المعينة) . ومثل هذه الألعاب تساعد الطلاب على فهم المعادلات غير المعينة والمبادىء المتضمنة فى حلها . وبينما لا توجد خطورة فى إستخدام ألعاب لمجرد التسلية بين الحين والحين ، إلا انه من الأفضل ــ وهذا أمر ممكن ــ أن نبحث عن الألعاب التى لها أهداف محددة لتعلم الرياضيات .

هناك تعاريف كثيرة لكلمة « لعبة » فاللعبة يمكن أن تعَرّف على أنها أية وسيلة للتسلية أو على أنها « مسابقة محكومة بقواعد معينة » أو على أنها « منافسة بين فرقاء تعمل تحت مظلة قيود معينة من أجل الوصول إلى هدف محدد » .. الخ

ويمكن تصنيف الألعاب بطرق كثيرة . فيمكن تصنيفها بحسب نوع المواد المستخدمة فيها مثل ألعاب اللوحات وألعاب البطاقات وألعاب قطع النرد . الخ . أو بحسب الأنشطة المتضمنة فى اللعبة مثل : عشوائية واحتمالية وتخمينية .. الخ . أو بحسب طبيعة اللعبة مثل : مسابقة فردية ومسابقة فرق ولا تنافسية .. الخ . وفى مناقشتنا هنا للألعاب الرياضية سوف نميزها بحسب أهداف التعلم المتوقع أن يحققها الطلاب من خلال ممارسة اللعبة . إن بعض الألعاب الرياضية يتضمن تنافسا بين أفراد أو بين مجموعات وبعضها لا يكون مبنيا على التنافس .

ألعاب لحل ألغاز أو مغالطات (متناقضات)

تتطلب بعض الألعاب الرياضية حل ألغاز أو مغالطات . وأثناء الحل يطبق الطلاب مهارات ومفاهيم ومبادىء رياضية ، وقد يكتشفون أشياء رياضية جديدة وقد استخدم زينو Zeno (الرياضى الأغريقى) مفاهيم النهاية والكميات المتناهية فى الصفر لحل مجموعة من المتناقضات مثل متناقضة السلحفاة والأرنب . إن أحد المغالطات المعروفة فى الجبر هى : « البرهان على أن كل عدد يساوى سالبه » . ولعلك تكتشف المغالطة فى البرهان التالى :

لتكن س x أى عدد مثل أ a أن

س = ا
س − ا = صفر
(س − ا)(س + ا) = صفر
(س − ا)(س + ا) / (س − ا) = صفر / (س − ا)
س + ا = صفر
س = −ا

$$x = a$$
$$x - a = 0$$
$$(x-a)(x+a) = 0$$
$$\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = \frac{0}{(x-a)}$$
$$x + a = 0$$
$$x = -a.$$

* يقتضى العمل هنا حل المعادلة غير المعينة (س + ١٠ص) + (س + ص) = ٣ب بحيث س ، ص تكون أعداد صحيحة موجبة

ومن الواضح أن المغالطة هنا هى القسمة على س – أ $(x - a)$ والتى تعلم أنها تساوى صفرا وغير مسموح بالقسمة على الصفر .

ومثل هذه اللعبة تقوم على التعاون وليس على التنافس

ألعاب اكتشافية « ابحث عن السبب »

تتضمن الألعاب الاكتشافية تحليلا لعمليات رياضية كما تتضمن تطبيق مهارات ومفاهيم ومبادىء . ومن أمثلة ألعاب « اكتشف السبب » لعبة تسمى « الحساب على طريقة راعى الغنم » وتسير كالآتى :

قيس راعى غنم فى أحد البرارى النائية . وتجارته هى تربية الأغنام وبيعها . ولكنه لا يعرف إجراءات عمليات الضرب بطريقتنا الحديثة ولكنه يجرى عمليات الضرب بطريقة خاصة تعتمد على مضاعفة الأعداد وتنصيفها . وهو لا يحب الكسور ويتشاءم من الأعداد الزوجية . فى أحد المرات باع قيس (٢٧) خروفا لصديقته ليلى بسعر الخروف (١٢) جنيها فقط . ولحساب ثمن البيع أجرى قيس العمليات التالية :

عدد الخراف	الثمن بالجنيهات
٢٧	١٢
١٣	٢٤
~~٦~~	~~٤٨~~
٣	٩٦
١	١٩٢
	٣٢٤

لقد قام قيس بتنصيف متتالي لعدد الخراف مسقطا الكسور (مثلا ٢٧ ÷ ٢ = ١٣) ويهمل النصف ، ١٣ ÷ ٢ = ٦ ويهمل النصف ..) . ثم ضاعف السعر بالتالى أيضا بدءا بسعر الخروف الواحد ١٢ ، ١٢ × ٢ ، ٢٤ × ٢ ... ثم جمع عمود الجنيهات مهملا الجنيهات المناظرة للعدد الزوجى ٦ فكان الناتج هو (٣٢٤) جنيها . وهذه هى نفس النتيجة لو تمت عملية الضرب بطريقتنا الحديثة إذ ان ٢٧ × ١٢ = ٣٢٤ والأن ما السر فى صحة النتيجة مع إستخدام طريقته هذه ؟

يبدو أن قيس أستخدم ــ بالفطرة ــ نظام العد الثنائى إلى جانب نظام العد العشرى حيث نلاحظ أن (٢٧) و (١١٠١١) بالنظام الثنائى ويحصل على هذه التحويلة بقسمة العدد (٢٧) على ٢ بالتتابع ثم نكتب الباقى :

العدد العشرى		بواقى القسمة		الثمن
٢٧	÷ ٢	١	×	١٢
١٣	÷ ٢	١	×	٢٤
٦	÷ ٢	٠	×	~~٤٨~~
٣	÷ ٢	١	×	٩٦
١	÷ ٢	١	×	١٩٢
				٣٢٤

ويلاحظ أن بواقى القسمة (١١٠١١) (١١٠١١) هى العدد الثنائى المناظر للعدد العشرى (٢٧) وأن ١ × ١٢ + ١ × ٢٤ + صفر × ٤٨ + ١ × ٩٦ + ١ × ١٩٢ = ٣٢٤

ألعاب للبحث عن أنماط أو قواعد

أحد الأعمال الهامة التى يقوم بها الرياضيون هو البحث عن تعميمات وأنماط يمكن أن تقود إلى اكتشافات رياضية جديدة . ويمكن أن يتكون لدى الطلاب فهم أفضل لكثير من المفاهيم والمبادىء الرياضية إذا استخدموا التحليل والتركيب للبحث عن قواعد وأنماط . فمثلا يمكن أن يفهم الطلاب مفاهيم الدالة والمتتابعة والنهاية من خلال تعميمات لأمثلة لتلك المفاهيم . ويمكن للألعاب المناسبة التى يعدها المعلم أن تكون حافزا لذلك . ومن استراتيجيات الألعالب الممكنة هنا أن يقسم الفصل إلى فريقين ثم يقوم أحد الفريقين بالتناوب بإعطاء أمثلة لدوال أو متتابعات ويقدمها للفريق الآخر الذى عليه أن يكتشف الدالة أو الحد التالى للمتتابعة أو نهاية المتتابعة . ويتفق على نظام لحساب نقط الفوز فى هذه المسابقة . وفيما يلى أمثلة لذلك .

(١) البحث عن الدالة :

(أ)

س	١	٢	٣	٠	١-	٢-	٣-
ص	٢	٥	١٠	١	٢	٥	١٠

الدالة : ص = س٢ + ١

x	1	2	3	0	−1	−2	−3
y	2	5	10	1	2	5	10

$y = x^2 + 1$

(ب) [(١ ، ٠) ، (١٠ ، ١) ، (١٠٠ ، ٢) ، ($\frac{١}{١٠}$ ، – ١) ، ($\frac{١}{١٠٠}$ ، – ٢)]

$(1,\ 0),\ (10,\ 1),\ (100,\ 2),\ \left(\frac{1}{10},\ -1\right),\ \left(\frac{1}{100},\ -2\right)$

(The function is $f(x) = \log_{10} x$.) [الدالة : د(س) = لو س]

(جـ) (□, □), (△, ▽), (○, ○), (▭, ▭), (⏢, ⏢)

[الدالة : اقلب الشكل الأول رأسا على عقب]

(٢) أوجد الحد التالى :

(أ) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{–١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{–١}{٩}$ ، .... [$\frac{١}{٨}$]

(ب) ٢ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٦٤}{٢٧}$ ، ... { (١ + $\frac{١}{٤}$)

(جـ) ٠١ ، ٠٤ ، ٠٩ ، ٠١٦

١٠ ، ٤٠ ، ٩٠ ، ١٦٠

(٣) أوجد نهاية كل من :

(أ) ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ١ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ... , لا توجد نهاية

(ب) ١ + $\frac{١}{١}$ ، ١ + $\frac{١}{٢}$ ، ١ + $\frac{١}{٣}$ ، ... [١]

(جـ) $(١ + ١)^{٢}$ ، $(١ + \frac{١}{٢})^{٢}$ ، $(١ + \frac{١}{٣})^{٢}$ ، ... [١]

ألعاب للتدرب على المهارات

بعد أن يقدم المعلم المهارات الرياضية للطلاب فإنه يجب عليهم أن يتدربوا عليها حتى يصلوا إلى مستو كامل من التمكن . التدرب وممارسة المهارات عن طريق حل العديد من التمارين يمكن أن تكون طريقة فعاله ولكنه يمكن ايضا ان يكون عملا روتينيا مملا . أحد الاستخدامات المفيدة للألعاب الرياضية هو التدرب على المهارات وممارستها . الألعاب التى تتضمن قدرا قليلا من التنافس يمكن أن تستخدم فى تعلم المهارات . ولكن التنافس الزائد فى اللعبة قد يعيق التمكن من المهارة عن طريق اثارة اتجاهات وقيم غير مناسبة . ويمكن للألعاب أن تزيد من فهم وتطبيق وتدعيم واستبقاء المهارات

بالاضافة إلى تحقيق الأهداف الوجدانية . وغالبية الألعاب الموجودة فى الكتب ومجموعات الألعاب الرياضية لطلاب المرحلة الثانوية مصممة لتعلم والتدرب على المهارات .

وتعتبر اللوحة الشبكية من العاب المهارات الحسابية حيث ان اللوحة عبارة عن شبكة من الخلايا المربعة الممتلئة بمجموعة من الأعداد . والهدف هو التحرك من مركز الشبكة إلى حدودها الجانبية بحيث ان حاصل ضرب أو مجموع الأعداد فى مسار الحركة يكون أقل من أو أكبر من نظيره عند اللاعب المنافس . ويمكن رسم هذه الشبكة على السبورة أو على لوحة من الورق المقوى أو تعرض بالسبوره الضوئية (أنظر الشكل ٣ ــ ٥) . يحاول الطالب منفردا أو الفريق يتقدم من مركز الشبكة خلال الخلايا متجها إلى خلية تقع على الحدود للحصول على الهدف العددى . فمثلا قد يكون الهدف العددى هو الوصول إلى الحدود بعد المرور خلال من خمس إلى ثمان خلايا بحيث يكون حاصل ضرب اعدادها اقل من نظيره فى مسار اللاعب المنافس . وتكون المسارات افقية أو رأسية فقط وغير مسموح بالمسارات القطرية . وفى جميعل الحالات ينتهى دور اللاعب متى وصل إلى خلية

مسار أ [A]

١	٢	٥/٣	٣/٥	٥/٢	٤/٣	٥/٢	٤/٣	٥/٢	٤/٣	٥/٢	٤/٣
٥/٢	٢	١/٣	٢	١/٢	١/٣	٤/٣	١/٢	٣	٤/٣	٢/٧	٥/٢
٧/٣	١	٥	٢	٣	٢	١	٣	٣/٧	٣/٧	٩/٤	٧/٣
١١/٥	١	٣	٥/٤	٥/٣	٤	٣	٢	٤	٥/٦	٢	٥/٢
١٢/٧	٧/٦	٩/٧	٣	٥/٦	١/٢	٥/٣	٣/٧	٢	١/٣	٥/٣	٧/٣
٩/٤	٣	١١/٩	٢	٧/٨	ابدأ	ابدأ	٣/٤	٣	١/٤	٢	٥/٢
١٢/٧	٣/٢	٦/٥	٤	١/٢	ابدأ	ابدأ	٦/٥	٣	١/٣	٤	٧/٣
٦/٥	٢/٣	١٢/٧	١١/٤	٣/٤	٢/٧	٥/١١	٩/٥	٤	١/٢	٣	٥/٢
٥/٤	١/٢	٢/٥	٣/٢	٢	٤	٣	٢	٢	١/٢	٢/٣	٧/٣
٢	٢/٣	٧/٨	١	٢/٣	٣/٤	٥/٧	٨/٣	١/٢	٢	١/٢	٥/٢
١	٢	٥/٢	٣/٢	٢	٤/٣	٢	١/٢	٣/٤	٧/٨	٨/٣	٧/٣
٣	٢	٤/٣	٢	٧/٦	٥/٢	٧/٢	٥/٣	٣/٤	١/٢	٣	٦

شكل ٣ ــ ٦ مسار ب [B]

تقع على حدود الشبكة . ويحدد للطلاب زمن معين لتحديد المسار من مركز إلى الحدود وكذلك لحساب حاصل الضرب . والشكل التالى يبن مسارين (أ) ، (ب) . [(a) ,(b)]

وتحسب العلامات بحسب القواعد التالية :

(١) لا تعطى علامات إذا كان المسار يمر بأكثر من ثمان خلايا أو إذا سار قطريا .
(٢) على الطالب أو الفريق أن يحسب بنفسه حاصل الضرب وإذا كان حسابه خطأ فيعطى صفرا .
(٣) تعطى ١٠ نقط لمن يحصل على أصغر حاصل ضرب وبعد اللعب عدة مرات تحتسب نقاط كل فريق (أو لاعب) لتحديد الفائز .

وطبقا لقواعد هذه اللعبة نعطى نقاط للإجابات الصحيحة وللاجابات الفائزة ويوجد هنا ايضا نوع من الاستراتيجية . فمثلا قد يكون من المناسب ان يجد اللاعب مسارا يعطى أكبر حاصل ضرب . وبعد اللعب عدة مرات قد يكتشف أحد اللاعبين مسارا يكون دائما مسارا فائزا . فإذا حدث ذلك فلابد من تغيير قواعد اللعبة مثل السماح بمسارات قطرية أو أن يكون الفوز لمن يحصل على حاصل ضرب أكبر .

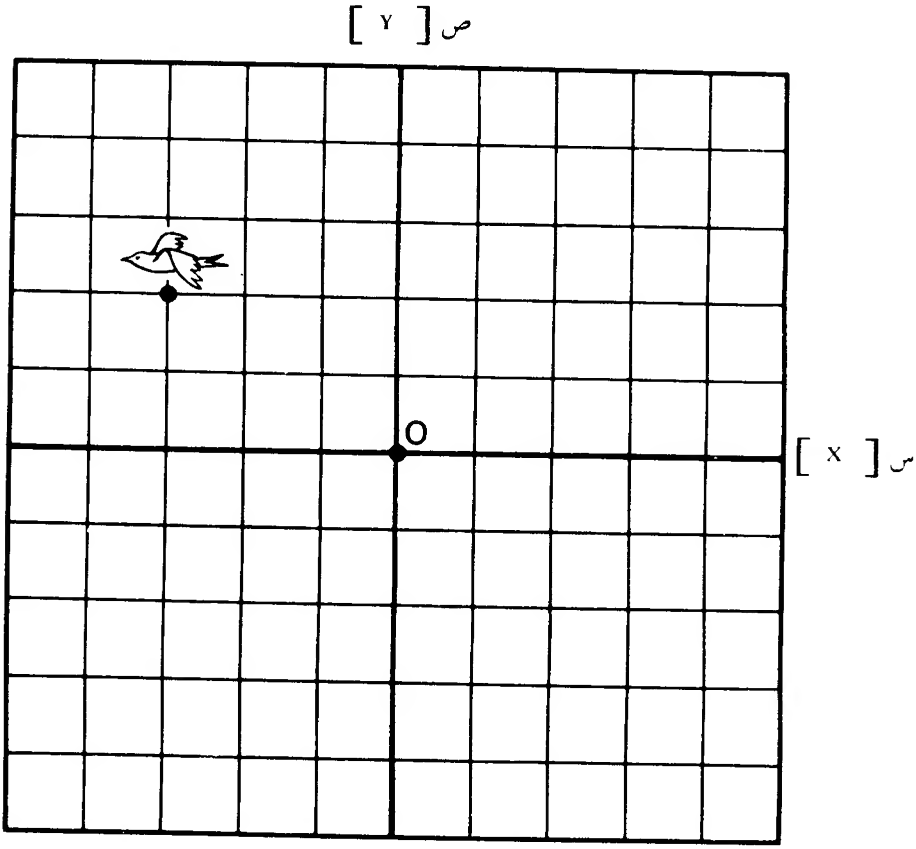
ويمكن تعديل هذه اللعبة للتدريب على مهارات الجمع والضرب لكل أنوع الأعداد كما يمكن إستخدام لوحات بأشكال مختلفة . كما يمكن تطويعها لأعمال فى الجبر والمثلثات . ويمكن استبدال خلايا الأعداد ببطاقات مكتوب عليها اعداد ويسحب الطالب عددا من البطاقات بحيث يحصل على حاصل ضرب أو مجموع .. والحقيقة هناك العديد من مثل هذه الألعاب والتى يمكن للطلاب والمعلمين ان يضعوا لها قواعد من عندهم بهدف التدرب على المهارات الحسابية .

ألعاب التخمين لتعلم المفاهيم والمبادىء

تستخدم ألعاب التخمين فى تدعيم المفاهيم والمبادىء ويمكن أن تساعد الطلاب فى تحسين قدراتهم على التقدير والتقريب . ويمكن أن تحقق هذه الألعاب أهدافا معرفية تشمل التذكر والفهم والتطبيق والتحليل بالاضافة إلى الأهداف الوجدانية التى تشمل الرغبة والأشباع فى الاستجابة . فيمكن ان تستخدم ألعاب التخمين فى تعلم مفاهيم رياضية مثل التباين والقيمة المطلقة وحل المعادلات ونظم الأحداثيات . كما يمكن إستخدامها لتدريب بعض مهارات حل المسائل اللفظية وبرهنة النظريات . ومن بين الأهداف غير المباشرة التى يمكن ان تحققها هذه الألعاب فهم قيمة الحدس والتخمين الذكى والتقريب كاستراتيجيات مفيدة فى الرياضيات .

وتوضح لعبة الاحداثيات التالية والتى تسمى سنارف (Snarf) ألعاب التخمين ، وهى تساعد الطلاب فى فهم المفاهيم المختلفة المتضمنة فى الأحداثيات . وتحتاج اللعبة إلى اقلام رصاص وورقة مربعات مرسوم عيها نظام احداثيات كارتيزيه (أحداثيات قطبية) . هدف اللعبة أن تخمن الموقع

الذى يختبىء فيه عصفور اسمه سنارف . ينقسم اللاعبون إلى فريقين متنافسين أحدهما يخبىء سنارف فى موقع ما والآخر يخمن موقعه ليصطاده وذلك بعد مجموعه من الأسئلة يجيب عنها الفريق الآخر بنعم أو لا فقط . الهدف هو معرفة موقع سنارف بأقل عدد ممكن من الاسئلة . ولتوضيح ذلك ، نفرض أن الفريق الأول خبأ سنارف عند النقطة التى احداثياها (ــ ٣ ، ٢) على نظام إحداثى ١٠ × ١٠ كما بالشكل (٣ ــ ٧) فإن على الفريق الصياد أن يلقى اسئلة يكتشف عن طريقها هذا الموقع .



الشكل (٣ ــ ٧)

ويمكن ان تسير اللعبة كالآتى :

أسئلة الفريق الصياد	اجابات الفريق الأول
(١) هل سنارف على يسار المحور الصادى ؟	نعم
(٢) هل سنارف فى الربع الثالث ؟	لا
(٣) هل سنارف أقرب إلى محور الصادات منه إلى محور السينات ؟	لا
(٤) هل الاحداثى الصادى أكبر من ١ ؟	نعم
(٥) هل الاحداثى الصادى ٢ ؟	لا
(٦) هل الاحداثى السينى أقل من أو يساوى ــ ٤ ؟	لا
(٧) هل سنارف مختبىء فى النقطة (ــ ٣ ، ٢) ؟	نعم

وقواعد اللعبة كالآتى :

(١) يجب أن يختبىء سنارف عند نقطة احداثياها اعداد صحيحة

(٢) يعطى الفريق الصياد (٢٠) نقطة عند بداية اللعبة .

(٣) كل مرة يسأل فيها الفريق سؤالا يفقد نقطه واحدة .

(٤) إذا أجاب الفريق الذى خبأ سنارف اجابة خاطئة ــ والحكم هنا هو المعلم ــ يعطى الفريق الصياد نقطة واحدة .

(٥) يمكن عند وصول الفريق الصياد إلى معرفة الموقع تصبح علاماتة مساوية للنقط المتبقية بعد خصم نقط الاسئلة (فى مثالنا تصبح ٢٠ ــ ٧ = ١٣ نقطة)

(٦) يعطى كل فريق عددا مساويا من الفرص لتخبئة سنارف واصطياده . والفريق الفائز هو الذى يحصل على أعلى العلامات .

ويمكن للطلاب أن يتعلموا من هذه اللعبة خواص الاحداثيات الكارتيزيه بالإضافة إلى تعلمهم لاستراتيجية إلقاء اسئلة فعاله . ويمكن أن تجرى اللعبة على احداثيات قطبية . كما يمكن أن تلعب اللعبة على محاور ثلاثية البعد . كما يمكن أن يكون السؤال بمفاهيم الاحداثيات الكارتيزية والاجابات بالاحداثيات القطبيه والعكس بالعكس .

ويمكن إبتكار العاب مماثلة للعبة سنارف مثل السؤال عن موقع نقطة على خط مستقيم ، أو بالسؤال عن عدد وتكون الأسئلة عن عوامله ، أو بالسؤال عن دوال جبرية أو مثلثيه من خلال التساؤل عن أشكالها البيانية . وهكذا بالنسبة لأية خبرة رياضية يمكن الوصول إليها عن طريق تحديد خواصها .

ألعاب لتعلم التقدير

مهارة التقدير التقريبى (Estimation) هى إحدى المهارات المهملة فى برامج الرياضيات . وهناك ٣ أنواع من التقدير التقريبى مرتبطة بالرياضيات : (أ) تقدير الاجابات للمسائل الكلامية فى الحساب والجبر والمثلثات ، (ب) تقدير الاجابات فى نتائج العمليات الحسابية ، (جـ) تقدير قياسات الأشياء الفيزيقية . عند إجراء العمليات الحسابية لا يعرف كثير من الطلاب كيف يجدون ما إذا كانت إجاباتهم معقولة . فى تفكيرهم أن الإجابة إما صواب أو خطأ ولكن لا يدر بخلدهم التساؤل عما إذا كانت معقولة أم غير معقولة . عند تطبيق المهارات الحسابية للأنشطة اليومية مثل الشراء من السوق أو التعامل مع البنك فكثير من الناس لا يمتلكون القدرة على عمل تقدير سريع ودقيق لصحة الحسابات . والبائع المتمرس تتكون لديه قدرة جيدة فى تقدير جملة مبالغ المبيعات للمشترى وأحيانا يكشف تقدير اخطاء حسابات أجريت على ألة حاسبة . كثير من الناس ضعفاء جدا فى تقدير الأوزان والمسافات ودرجات الحرارة وغيرها . حاول ايها القارىء العزيز — ان تختبر قدرتك على التقدير المعقول . كم يبلغ بالتقريب طول ذراعك ؟ وزن القلم الذى تكتب به ؟ عرض ابهامك ؟ أبعاد الغرفة التى تعيش فيها ؟ درجة حرارة المكان الذى تجلس فيه ؟

ويمكن لمعلمى الرياضيات ان يساعدوا طلابهم فى تعلم أنواع التقدير الثلاث بتكليفهم بأعمال تقديرية . ومقارنتها بالقياس المضبوط والتأكيد على أهمية التقدير المعقولة وإن لم تكن مضبوطة تماما وذلك من خلال الواجبات المنزلية والمناقشات التى تدور فى الفصل . وفى جميع الحالات يوضح للطالب ان مدى التسامح فى التقدير تتوقف على طبيعة الموقف والشىء المقاس .

والتدرب على التقدير يمكن أن يتم خلال الألعاب . ومن أمثلة ذلك اللعب التالية التى تهدف إلى تحسين مهارات الطلاب على سرعة تقدير القياس (المترى) لأنواع مختلفة من الأشياء العامة وتتطلب اللعبة إعداد مجموعه متنوعة من الأدوات والأشياء العادية المستخدمة فى المدرسة والمنزل والتى يمكن تقدير قياساتها بالنظام المترى مثل :

اقلام رصاص — طباشير — كوبات — فناجين — معلبات — صناديق كرتون — قطع حلوى — لمبات إضاءة — اقراص اسبرين — ملاعق — أمشاط — فضلات — قطع خشبية .

ويطلب من الطلاب تقدير أوزان واطوال ومساحات وحجوم لبعض هذه الأشياء بحسب طبيعتها ويمكن تقسيم الفصل إلى مجموعات كل منها يحاول أن يصل إلى أفضل تقدير لمفردة من الأدوات السابقة ويعطى نقطة للمجموعة التى تصل إلى ذلك . وعلى المعلم أن يتجنب ان يعطى بنفسه القياس المضبوط بل يترك الطلاب ليقوموا بذلك ويقارنوا بين تقديراتهم التقديرية والحسابات المضبوطة على أن تعطى لهم أدوات القياس المطلوبة مثل المساطر والأشرطة المدرجة والترمومترات ويمكن أن تجرى اللعبة على المستوى الفردى حيث يعرض المعلم — فى اختبار قصير — مفردات لتقديرها واحدة بعد الأخرى ويطلب ان يكتب كل طالب تقديرا لإحدى قياساتها بحسب طبيعتها ثم فى النهاية يطلب منه

إيجاد القياسات المضبوطة باستخدام أدوات القياس المناسبة ثم يقارنون بين تقديراتهم والقياسات المضبوطة . ومن أمثلة الاسئلة فى هذا المجال :

(١) ما طول قلم الرصاص ؟
(٢) ما سمك قطعة النقود المعدنية من فئة القرش ؟
(٣) ما درجة حرارة هذه الغرفة ؟
(٤) كم وزنك ؟
(٥) ما حجم هذا الفصل ؟
(٦) ما معدل إستهلاك البنزين بالكيلو متر فى الساعة ليسارة فيات ؟

ويجب ان يتأكد المعلم من وضوح وفهم الطلاب لوحدات القياس وسلامة نطقها وكتابتها ورموزها المتفق عليها .

مصادر الألعاب الرياضية

هناك مصادر عديدة للألعاب الرياضية فهناك الألعاب الجاهزة فى المحلات التجارية محليا وخارجيا وهناك أوصاف للكثير من الألعاب فى الكتب والمجلات الخاصة بتدريس الرياضيات . والمعلم المبدع يستطيع أن يبتكر من الألعاب وأن يعدل فى بعض الألعاب الموجودة بما يتفق مع أهداف الدرس . وكلما ابتكرت لعبة جديدة هناك من يقوم بالتحسين والتعديل فيها فيصل إلى لعبة أفضل .

خطة لدرس بإستخدام الألعاب :

فيما يلى مثال لخطة فى درس يستخدم لعبة . ويمكن تعميم الاستراتيجية المعروفه فى موضوعات رياضية أخرى . كما أنها مثال لدرس يعمل فى اطار نموذج التدريس الجماعى (لمجموعة) . وموضوع هذا الدرس : التدريب على مهارات حسابيه .

المحتوى الرياضى : موضوع هذا الدرس جمع الكسور والخبرات الرياضية هنا هى الحقائق والمهارات . وهذا الدرس مناسب لمراجعة المهارات والتدرب عليها أى جمع أنواع مختلفة من الكسور والاعداد الكسرية وترتيب الكسور . ويأتى هذا الدرس بعد تدريس جمع الكسور والأعداد الكسرية . وحيث ان هذا الدرس هو درس مراجعة فمن المفضل أن يسبقه اختبار عن جمع الكسور .

أهداف التعلم : الأهداف المعرفيه : ان يعرف ويفهم الطلاب مفاهيم الكسر الصحيح والكسر غير الصحيح (مثل $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) والعدد الكسرى (مثل $٣ \frac{٣}{٥}$) . ان يعرف الطلاب ويفهموا ويطبقوا مهارات الجمع فى الكسور .

الأهداف الوجدانية : ان يرغب الطلاب فى الاستجابة أثناء النشاط الفردى وأن يستمتعوا ويشعروا بالأشباع فى استجاباتهم واسهامهم بمعلومات مفيدة فى الأنشطة الجماعية . ان يتقبل الطلاب قيم المشاركة فى التدريب على مهارات الجمع من خلال الأنشطة الجماعية .

وتناقش هذه الأهداف مع الطلاب قبل بداية الدرس .

مصادر ووسائل التعلم : تعد نسخ كافيه من مجموعة مسائل الجمع التاليه بحيث أن يحصل كل طالب على نسختين ونترك الاجابة والترتيب ليقوم بها الطلاب :

مهارات الجمع

المسائل	الاجابة	الرتبة
(أ) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$	$\left(2\frac{1}{3}\right)$	(٦)
(ب) $\frac{8}{9} + \frac{2}{3}$	$\left(1\frac{5}{9}\right)$	(٥)
(جـ) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	$\left(1\frac{1}{12}\right)$	(٢)
(د) $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{1}{3}$	$\left(1\frac{17}{105}\right)$	(٤)
(هـ) $1\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$	$\left(2\frac{3}{8}\right)$	(٧)
(و) $2\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	$\left(2\frac{17}{24}\right)$	(٩)
(ز) $1 + 1\frac{1}{2}$	$\left(2\frac{1}{2}\right)$	(٨)
(ح) $3\frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{7}$	$\left(\frac{9}{14}\right)$	(١)
(ط) $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{7}$	$\left(7\frac{5}{42}\right)$	(١١)
(ى) $\frac{7}{3} + \frac{5}{2} + \frac{15}{9}$	$\left(6\frac{1}{2}\right)$	(١٠)
(ك) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$	$\left(1\frac{3}{20}\right)$	(٣)
(ل) $2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3}$	$\left(7\frac{1}{4}\right)$	(١٢)

استراتيجيات التقويم القبلى : المطلوب هنا تقويم قبلى مختصر فقط . يُسأل كل طالب أن يعطى مثالا لكسر صحيح وآخر غير صحيح وعدد كسرى (عدد صحيح وكسر) . كما يطلب من كل طالب ان يرتب تصاعديا مجموعة من الأعداد كالآتى :

$\frac{١}{٣}$ ، ٢ ، $١\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٩}{١١}$ ، $١\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١١}{٧}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، ١ ، $\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{١١}{٥}$

استراتيجيات التعليم والتعلم : يعطى كل طالب نسخة واحدة من ورقة العمل المبينه ويطلب من كل منهم ان يحل المسائل فرديا ويضع الاجابة التى يحصل عليها إلى جانب السؤال فى العمود المخصص للاجابة . ويطلب ترتيب الاجابات تصاعديا من الأصغر إلى الأكبر وأن يعطى لكل اجابة الرتبة المناسبة (١) ، (٢) ،.. ، (١٢) وتكتب امام المسألة فى العمود المخصص للترتيب وتعطى الرتبة (١) لأصغر اجابة ، (١٢) لأكبر اجابة . وإذا لم يتمكن طالب ما من عدم حل بعض المسائل فعلية أن يعطى تعبيرا تقريبيا للاجابة ويعطى رتبة التقدير . ويقول المعلم للطلاب ان العلامات سوف تعطى على الترتيب وليس على نتائج العمليات الحسابية ولذا فمن المهم لهم أن يهتموا بعملية الترتيب وبعملية تقدير الاجابة بأكبر قدر من الدقة . بعد أن ينتهى الطلاب من هذا العمل يجمع المعلم الأوراق من الطلاب ويعطيهم النسخة الثانية ويطلب منهم ان يعملوا كمجموعة فى إيجاد الحلول الصحيحة وان يقوموا بترتيب الاجابات تصاعديا ثم يكتب قائمة باجاباتهم ويرتبها على السبورة . بعد ذلك يعطى المعلم النتائج الصحيحة بنفسه ويوزع عليهم أوراقهم الفردية التى سبق ان جمعها ويتركهم يضعون لأنفسهم علامات بحسب اجاباتهم مقارنة بالإجابات الصحيحة كالآتى :

(١) يحسب كل طالب الفرق المطلق بين الرتبة التى حصل عليها والرتبة الصحيحة بحسب اجابة المعلم فى كل مسألة .

(٢) يحسب كل طالب مجموع الفروقات التى حصل عليها من الخطوه (١) . وهذا المجموع هو العلامة التى يحصل عليها الطالب فى اللعبة . وتكون أقل علامة هى الفائزة فى اللعبة والعلامة المثالية بطبيعة الحال تكون الصفر .

(٣) تكرر الخطوتان (١) ، (٢) لمقارنة مجموعة الرتب التى حصل عليها الطلاب مع المجموعة الصحيحة التى وضعها المعلم وذلك عن طريق العمل الجماعى (الطلاب كمجموعة) . والغرض من اعتبار الرتب هنا بدلا من النتائج هو أن يشعر الطلاب بأن للعمل التقديرى المعقول دور فى مهارات تعلم الرياضيات كما هو الحال بالنسبة للعمل المضبوط .

استراتيجيات التقويم البعدى : بعد الإنتهاء من العمل الأساسى يعطى الطلاب اختبارا أو امتحانا موجزا يحتوى على اسئلة ومسائل شبيهه بالمسائل التى أعطيت فى اختبار التقويم القبلى والموجودة فى ورقة العمل . ويتحدد مدى تحقيق أهداف الدرس المعرفية عن طريق درجات الطلاب فى هذا الاختبار . ويقدر مدى تحقيق الأهداف الوجدانية للدرس من خلال ملاحظة درجة مشاركة الطلاب واهتماماتهم أثناء النشاط الجماعى فى ورقة العمل .

والاستراتيجية التى آستخدمت فى هذا الدرس يمكن تطبيقها فى معظم موضوعات الرياضيات المقررة على المرحلة الثانوية مع مراعاة طبيعة المادة وطبيعة الطلاب .

نموذج التعليم والتعلم الفردى

يختلف الطلاب فى مراحل النمو العقلى والقدرات الرياضية ومهارات حل المشكلات والنضج العاطفى والإجتماعى وأساليب التعلم والدافعية للتعلم فى المدرسة والخلفية الرياضية ونتيجة لكل هذه الفروق الفردية بين الطلاب ، فإن أكثر معلمى الرياضيات فعاليه هم أولئك الذين يستخدمون طرقا تدريسية تعمل على مواجهة هذه الفروق . وفى مواجهة هذه الفروق الكبيرة ينبغى أن يغير المعلمون الأهداف والواجبات المنزلية والنشاطات المدرسية ومعايير التقويم وطرقه بحسب احوال طلابهم . ونظرا لكثرة اعداد الطلاب فى الفصل الواحد فإنه يكون من الصعب إستخدام برنامج فردى كامل أو مقرر لكل طالب ولكن يمكن إعطاء فرص محدودة ولكنها فعالة للتعليم الفردى فى كل حصة رياضيات .

هناك إجراءات متنوعة لمقابلة الفروق الفردية فى حصص الرياضيات تتراوح بين برامج على مستوى الإدارة التعليمية (فى الولايات المتحدة) إلى برامج يضعها المعلم يوما بعد يوم خصيصا لفصوله .

نموذج عام للتعليم الفردى

عناصر هذا النموذج العام تشبه أنشطة تخطيط الدرس والسمه المميزه لنموذج التعليم الفردى ، وغير الموجودة فى نماذج التعليم والتعلم الأخرى ، هى أن كل طالب يعطى المواد التعليمية ويتعلمها بحسب خطوه الذاتى . فى البرامج غير المتفردة يقرر المعلم السرعة التى تعطى بها المادة كما يقرر متى تعطى الاختبارات وتتم المراجعات ومتى ينتقل الطلاب من وحدة لأخرى . ولكن فى التعليم الفردى يعطى كل طالب المقرر بحسب خطوه الذاتى ويأخذ الاختبارات عندما يكون مستعدا لها ويراجع المادة التعليمية اينما يشعر بضرورة ذلك ويتحرك لوحدات جديدة بعدما يكون قد تمكن من الوحدات المتطلبة لها مسبقا . ورغم أن برامج التعليم الفردية تختلف عن بعضها البعض إلا انها تشترك جميعا فى الخطو الفارق المناسب لكل طالب .

وتتكون عناصر نموذج التعليم والتعلم الفردى من الآتى :

(١) وسائل تعليم وتعلم متفرده .

(٢) أهداف تعليم وتعلم متفرده .

(٣) استراتيجيات تقويم قبلى متفرد .
(٤) أنشطة تعلم متفرد .
(٥) استراتيجيات تقويم بعدى متفرده .

وسائل التعليم والتعلم المتفرد

تختار وسائل التعليم والتعلم المتفرد بحسب أساليب التعلم المختلفة للطلاب . فبعض الطلاب يتعلمون الرياضيات عن طريق قراءة الكتاب المقرر ، وبعضهم يحتاجون للعمل بمواد محسوسة ، والبعض الآخر يتعلمون عن طريق الأستماع لمحاضرات أو مشاهدة عروض . ومع ذلك فكل الطلاب يتعلمون أفضل من خلال استخدام توليفات خاصة من الوسائل والمصادر . ومن ثم فلابد من توفر العديد من الأنواع المختلفة من مصادر التعلم لمساعدة الطلاب للتمكن من موضوع معين فى الرياضيات فمثلا يمكن تقديم المفاهيم والمهارات المتضمنة فى التمثيل البيانى للدوال المثلثية فى شكل كتاب مدرسى وفى شكل سلسلة المهارات المعملية وبواسطة تسجيل صوتى ومن خلال شريط من الأفلام الثابتة أو الأفلام المتحركة والناطقة الملونة ويتحدد ذلك على أساس تفضيلات الطالب وقدراته المتفردة وأسلوب تعلمه الخاص به . وتختار وسائل التعلم بحيث يمكن تقديم كل موضوع رياضى للطلاب بإشكال مختلفة متعدده .

أهداف التعلم المتفردة

عندما يطلب من معلمى الرياضيات ان يدرسوا نفس المادة لكل طالب فى الفصل فى نفس الوقت ، فإنهم يختارون عادة نفس أهداف التعلم لكل طالب ، أى أن الأهداف هى أهداف جماعية وليست فردية . ورغم ان المعلم قد يتوقع ان كل طالب فى الفصل سوف يدرس نفس الموضوعات الرياضية ، لكنه لا يمكن ان يتوقع ان كل الطلاب سوف ينجزون نفس المستوى من التمكن فى فترة معينة من الزمن . ويتوقف مدى إجادة كل طالب لموضوع معين على قدراته الخاصة وتمكنه من الموضوعات المبنية عليها ومعدله فى تعلم الرياضيات .

فى البرامج التعليمية المتفردة ، تختلف أهداف التعلم للطالب ، أى أنه يمكن أن توضع أهداف مختلفة لموضوع معين لكل طالب . وحتى عندما توضع نفس الأهداف لكل الطلاب فإنه يسمح لكل طالب ان يعمل بحسب معدله حتى يحقق تلك الأهداف . وتتضمن بعض البرامج المتفردة مسارات مختلفة ، ويسكن الطلاب فى المسارات بناء على قدراتهم وتحصيلهم السابق فى الرياضيات . والطلاب المسكنون فى المسارات منخفضة المستوى لا يصلون إلى نفس مستوى تمكن طلاب المسارات رفيعه المستوى . فمثلا قد يكون من المتوقع ان يتمكن بعض الطلاب من مهارات حسابية معقدة أكثر من غيرهم ، ولكن لابد أن يكتسب كل الطلاب مهارات الحساب الأساسيه . وهدف كل طالب ان يصل إلى أعلى مستوى ممكن تسمح به قدراته فى موضوع معين . ومن المتوقع ان بعض الطلاب سوف يتعلمون بعض الموضوعات بعمق أكثر من غيرهم ، وبعضهم سوف يغطى

موضوعات أكثر من غيرهم . ومع ذلك فإن النجاح والفشل مبنيان على أهداف الفرد وليس أهداف الجماعة . ومن هذا المنطلق فإن كل طالب يتنافس مع نفسه وليس مع الآخرين .

استراتيجيات التقويم القبلى المتفرد

فى البرامج المتفردة يقوم مستوى تمكن كل طالب من المتطلبات السابقة من الحقائق والمهارات وزالمفاهيم والمبادىء قبل أن يبدأ موضوعا جديدا . وعندما يتضح أن طالبا لم يحصل المتطلبات المسبقة لموضوع جديد ، فإن المواد التعليمية والاستراتيجيات تختار لتساعده على تمكن تلك المتطلبات قبل أن يتحرك نحو دراسة المادة الجديدة . مواد وأنشطة التقويم القبلى هى ايضا متفردة ، مما يعنى انه توجد طرق متعددة للطالب يبرهن بها على تمكنه من المتطلبات المسبقة . وهنا يمكن قبول مستويات مختلفة للتمكن للطلاب المختلفين . ويمكن اثبات تمكن الطلاب من المتطلبات السابقة من خلال اختبارات تحريرية وإمتحانات موجزة شفوية وأنشطة معملية ومناقشات مع المعلم .

أنشطة تعلم متفرده

تختلف الأنشطة فى النموذج الفردى . فقد تختار أدوات فيزيقية وأنشطة معملية للطلاب الذين يتعلمون الرياضيات من خلال تمثيلات محسوسه . أما القادرين على التفكير المجرد ممن ينتمون إلى مرحلة العمليات الشكلية فى ظل نظرية بياجيه فإنهم قد يتعلمون المفاهيم والمبادىء الرياضية من خلال قراءة الكتب المدرسية وبعضهم قد يكون الأفيد له ان يتعلم من خلال الصورة المتحركة والنماذج الفيزيقية .

وعند تعلم المهارات الرياضية فبعض الطلاب يحتاجون إلى مران أكثر من غيرهم . ويمكن لبعض الطلاب ان ينتقلوا إلى موضوعات جديدة دون أن تطلب منهم ان يحلوا قائمة طويلة من التمارين المتكررة النوع طالما أنهم اظهروا انهم يتقنون تلك المهارات بحل مجموعة قليلة منها . وحذار أن يوهم بعض الطلاب بطيئى التعلم بأنهم فاشلون بل لابد من توفير المواد المناسبة والزمن المناسب لقدراتهم .

التقويم البعدى المتفرد

كما هو الحال فى التقويم القبلى فإن أهداف وإجراءات التقويم البعدى لابد وأن تتفرد من حيث انها تبنى على سمات كل طالب . فقد يختلف الطلاب فى القدرة على الوصول إلى مستوى التمكن فى بعض الموضوعات الرياضية كما قد تختلف طرق البيان على التمكن . يجب أن نتوقع من كل طالب ان يتعلم إلى أقصى ما تسمح له قدراته ولكن على كل طالب أن يبين أنه قد حصَّل حدا أدنى من الكفاءة قبل التقدم إلى موضوع جديد وحيث أن معظم البرامج الفردية تؤكد التمكن وليس التنافس فإن مواقف التقويم البعدى لابد وأن تكون فى هذا الإطار فكل طالب يعلم ان لديه فرصة ثانية فى تعلم موضوع ما إذا لم يكن قد أحسن الإجابه فى الاختبار البعدى ولكن يجب ألا ينتقل طالب إلى موضوع جديد مالم يكن قد تعلم المتطلب السابق له .

بعض البرامج المقترحة للتعلم الفردى

فيما يلى بعض المداخل الجزئية على مستوى المدرسة أو الإدارة التعليمية لتفريد التعليم :

(١) وجود فرص لاختصار عدد سنوات التعليم للطلاب من ذوى القدرات العالية حيث يتم نقلهم من فرقة دراسية لأخرى عندما ينتهون كأفراد من مقررات الفرقة الأدنى دون انتظار لنهاية عام كامل .

(٢) تقديم مقررات علاجية للطلبه الضعفاء .

(٣) توزيع الطلاب بحسب قدراتهم ومستوياتهم السابقة على أجزاء مختلفة من المقرر .

(٤) تقليل كثافة الفصول أو تعيين مساعدين للمدرس فى الفصول كبيرة الأعداد .

(٥) استخدام بعض المواد التعليمية المبرمجة لمواجهة الخطو المتفرد فى التعلم

(٦) توفير فرص مقررات الدراسة المستقلة ومواد التعلم الذاتى فى مقررات الرياضيات المتقدمة .

(٧) إدخال مقررات المجالات العملية حيث يكون من الواجب على الدارسين التمكن من مهارات معينة .

(٨) إستخدام بعض برامج الكمبيوتر المناسبة (إذا كان ذلك ممكنا)

وهذه المداخل وغيرها تتطلب بطبيعة الحال المزيد من التكاليف كما أن لها محدداتها التربوية . فتقسيم الطلاب بحسب قدراتهم مثلا قد يسبب احباطا لطلاب المسارات البطيئة ويخلق نوعا من التفرقة بين الطلاب داخل نفس المدرسة إلا أن هذه الإجراءات ما هى إلا أساليب جزئية يمكن الاستفادة منها فى مواجهة الفروق الفردية .

أساليب للتعليم الفردى داخل الفصل

ما لم يكن هناك برامج تفريد عامة وضعتها المدرسة أو الإدارة التعليمية ، فهناك أساليب كثيرة يمكن أن يستخدمها المدرس بنفسه لمقابلة الفروق الفردية بين طلابه . فمن المناسب أن يقيم المعلم مستوى كل من طلابه بالنسبة للمتطلبات السابقة فى بداية كل مقرر ، وأن يفحص سجلات كل طالب وصحيفة احواله العلمية ومؤشرات قدراته ومستويات دافعيته . وعلى المدرس أن يستخدم كل هذا بحذر شديد . فقد يكون الطالب قد نضج فلا تشده سجلاته إلى مستوى أدنى بل يجب أن يعامل بحسب مستواه الحالى حيث يتوقع المعلم ما هو أفضل .

من المناسب أيضا أن يضع المعلم حدودا دنيا وعليا للأهداف المعرفية بحيث أن يحقق كل طالب الحد الأدنى لوحدة ما قبل الأنتقال للوحدة التالية . وتكون للأهداف العليا غاية قصوى يمكن أن يصل إليها الطلاب خاصة أصحاب المستوى المرتفع . فمثلا فى تبسيط المقادير الجبرية الجذرية ، يكون من المتوقع أن يعالج كل الطلاب مقادير مثل $\sqrt{١٢٨}$ ، $\sqrt[٣]{-٥٤ س^{٤} ص^{٤}}$ ، $\sqrt{س^{-٦}}$ $\left[\sqrt{128},\ \sqrt[3]{-54x^4y^4},\ \text{and}\ \sqrt{x^{-6}};\right]$ ولكن قد يكون غاية أعلى قد لا يصل اليها كل الطلاب تبسيط مقدار مثل $\sqrt[٥]{\left(-\frac{س^{-١٠}}{٢٤٣ س^{٢}}\right)^{-٤}}$ $\left[\sqrt[5]{\left(-\frac{x^{-10}}{243x^2}\right)^{-4}}\right]$.

عند التدريس لعدد كبير داخل الفصل فقد لا يكون من الممكن أن يضع المعلم استراتيجيات مثلى لكل طالب ولكنه يستطيع أن يستخدم استراتيجية تكون الأكثر مناسبة لكل موضوع وأن يغير من استراتيجيات تدريسه . إن توليفة جيده من التحدث والمناقشات مع الطلاب والأنشطة المعلمية ...... فى كل موضوع يمكن أن تسهل التعلم لكل طالب . وعند إستخدام أساليب أمثلة وأنشطة ووسائل متنوعة فى تدريس كل موضوع ، يصبح الوصول إلى أنماط التعلم لكل طالب أكثر احتمالا .

وللمعلم أن يتبنى نظاما لإثابة التحسن النسبى للطلاب وقد يكون هذا عن طريق الاختبارات والمناقشات . ويمكن أن تنظم الاختبارات والواجبات المنزلية بحيث تشمل فرص اختيار الأسئلة والواجبات على أن تعطى درجات أضافية لمن يختار المسائل والواجبات الأصعب مع مراعاة تقويم الطالب فى حدود مستواه .

ومن بين المقترحات لتفريد التعليم داخل الفصل :

١ – أن يكتب الطلاب تقارير ويقومون بعروض عملية وينفذون مشروعات مناسبة لأساليب التعلم المختلفة
٢ – أن يندمج كل طالب فى أنشطة متنوعة مثل الأسئلة والأجوبة والمناقشات الجماعية والعمل على السبورة بحيث يشعر كل طالب أنه له دور هام فى الفصل .
٣ ــ أن يعمل الطلاب فى مجموعات صغيرة بحيث توجد فرص ليتعلم الطلاب من بعضهم البعض .
٤ ــ أن يطلب من كل طالب أعمالا تتفق مع قدراته ، وأن يقدم الطالب بطىء التعلم حينما يظهر أى تقدم ، وأن لإيثاب الطلاب أصحاب القدرات المرتفعة على الأعمال البسيطة .
٥ ــ إثراء الكتاب المدرسى بمزيد من المواد التعليمية ومصادر التعلم المناسبة .
٦ ــ اختيار وسائل معينة جيدة ومناسبة .
٧ ــ توفير مكتبة صغيرة تتضمن كتبا مسليه عن الرياضيات والرياضيين .

خلاصة

كل برنامج تعليم فردى له حدود وكلها لها محددات عامة . فجميعها تميل إلى زيادة التأكيد على أن يعمل الطالب بمفردة ومن ثم تقلل التأكيد على قيمة العرض المباشر الجيد وعلى التفاعلات بين المجموعة أثناء التعلم .

والتدريب الجيد هو المفتاح للتعلم الفعال سواء كان التدريس يتم عن طريق معلم أو كتاب مبرمج أو فيلم يمكن لكل معلم أن ينمى عددا من الاجرائيات الممتازة للتعليم الفردى والتى يمكن تصميمها بحيث تركز على متغيرات التعلم الفريدة لكل طالب .

النموذج الحلازونى للتعليم والتعلم

إذا ما تم تعلم مهارة ما فإن المران المتكرر عليها قد يسهل تذكرها لمدة طويلة كما قد يساعد المتعلم على تحسين سرعة ودقة آدائها . وإذا فشل الطلاب فى تعلم مهارة عند أول مرة تقدم لهم فإن إعادة تدريسها فى وقت لاحق قد ينتج عنه أيضا تمكن من تلك المهارة فمثلا قد يفشل كثير من الطلاب فى تعلم المهارات الأساسية فى الحساب حتى بعد أن تكون قد دُرِّست لهم فى عدة صفوف دراسية فى المرحلة الابتدائية والأعدادية ومن ثم فإن كثيرا من المدارس الثانوية توفر فرصا لمقررات علاجية حتى يتاح لهؤلاء الطلاب فرصا للتمكن من المهارات الأساسية .

إن تعلم المفاهيم والمبادىء هو عملية عقلية أكثر تعقيدا من التمكن من الحقائق والمهارات . يمكن أن تعرف كثير من المفاهيم الرياضية بطريقة صحيحة عند مستويات مختلفة عديدة من التجريد والتعميم . ويعنى هذا أنه حتى بعد أن يكون أحد المفاهيم قد درس عند مستوى معين فإنه قد يكون من المناسب أن يعرف فى مستوى أكثر تجديدا وعمومية فى مقرر لاحق .

فمثلا مفهوم المساحة لشكل مستو يعرف لصغار الأطفال على أنه عدد الوحدات المربعة اللازمة لتغطية ذلك الشكل . ورغم أن هذا التعريف صحيح ولكنه ليس عاما بالدرجة التى تكفى لإستخدامه فى ايجاد مساحة معظم الأشكال المستوية كما أنه محسوس جدا بدرجة أنه أقل من أن يمكن تطبيقه لأشكال مستوية مجردة . فمثلا هذا التعريف لا يفيد فى ايجاد مساحة لكل مجموعة خاصة من الأشكال المستوية بواسطة قانون عام . فمثلا مساحة المستطيل يساوى (الطول × العرض) ، ومساحة الدائرة م = ط س٢ [$A = \pi r^2$] حيث نق نصف قطر الدائرة ، ومساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س ع [$A = \frac{1}{2} bh$] حيث س ، ع [b,h] قاعدة وإرتفاع المثلث .. وهكذا . وبعد دراسة الدوال فى الجبر وحساب المثلثات يصبح التعريف الثانى هذا غير صالح لايجاد مساحات محدودة بمنحنيات هذه الدوال ويصبح من الضرورى إعادة تعريف المساحة كتكامل ريمانى محدد ، وهذا بدوره ليس عاما بدرجة كافية لمعالجة مجموعات معينة من الدوال غير المتصلة .

ففى هذه الدوال يعاد تعريف المساحة مرة أخرى كتكامل ليبيه (Lebsgue Integral) وهو أكثر عمومية من التعاريف الثلاث السابقة . ومع ذلك فإن كل تعريف تالٍ للمساحة يبنى جزئيا على التعريف السابقة . ويتضمن تمثيلات وتطبيقات المساحة فى التعريف السابقة له .

وبما أن المبادىء عبارة عن علاقات بين مجموعات من المفاهيم ، فإنه يمكن إعادة بناء كل مبدأ فى صورة أكثر تجريدا وتعميما على أساس التعاريف المعاد صياغتها تباعا للمفاهيم المتضمنة فيها . فالمبدأ القائل بأن مساحتى شكلين مستويين تكونان متساويتين إذا اشتملتا على نفس الوحدات المربعة يجب أن يعاد صياغته كالآتى : المساحتان المحدودتان لمجموعتين من الدوال تكونان متساويتين إذا كان التكاملان الريمانيان فوق هاتين الدالتين متساويين .

وعلى الرغم من أن معظم المهارات الرياضية تستخدم فى تعلم مهارات أكثر تعقيدا ويمكن تطبيقها لحل مسائل أكثر صعوبة . فإنه نادرا ما يعاد صياغة تلك المهارات فى صور أكثر تجريدا وعمومية . وما أن يتم التمكن من مهارة أساسية فإنه يمكن تطبيقها لأى موقف يستلزم استخدامها . والأمر يختلف بالنسبة للمفاهيم إذ أنه قد يتطلب الأمر إعادة تعريفها تماما قبل تطبيقها فى مواقف جديدة .

كثير من المهارات الرياضية لا يصح أن تدرس للطلاب قبل أن يكونوا قد امتلكوا النضج العقلى والمعرفة الرياضية التى تؤهلهم لأدائها وتطبيقها . فمثلا يجب ألا يدرس الطلاب مهارات جمع الكسور العادية قبل أن يتمكنوا من جمع حساب وقسمه الأعداد الطبيعية .

يمكن أن يتعلم الطلاب المفاهيم والمبادىء فى مراحل مختلفة من النمو شريطه أن يعرف ويمثل كل مفهوم ومبدأ بطريقة متفقة مع النمو العقلى والنضوج الرياضى لطلاب تلك المرحلة . وعادة ما يصنف إعادة تدريس المهارات الرياضية على أنه نشاط علاجى . غير أنه إعادة تعريف مفهوم يعتبر نشاطا جديدا .

تتضح هذه الطبيعة التتابعية لنمو المفاهيم الرياضية فى التطور التاريخى والبنائى للرياضيات . فالطبيعة التتابعية لتعلم المفهوم عند الطلاب تنتج من النمو الزمنى للعمليات العقلية الانسانية . وللإستفادة من هذا النمو التتابعى فى المفاهيم الرياضية والعقل الإنسانى ظهر نموذج التعليم والتعلم الحلازونى كنموذج مفيد وضرورى لتعليم وتعلم المفاهيم والمبادىء الرياضية .

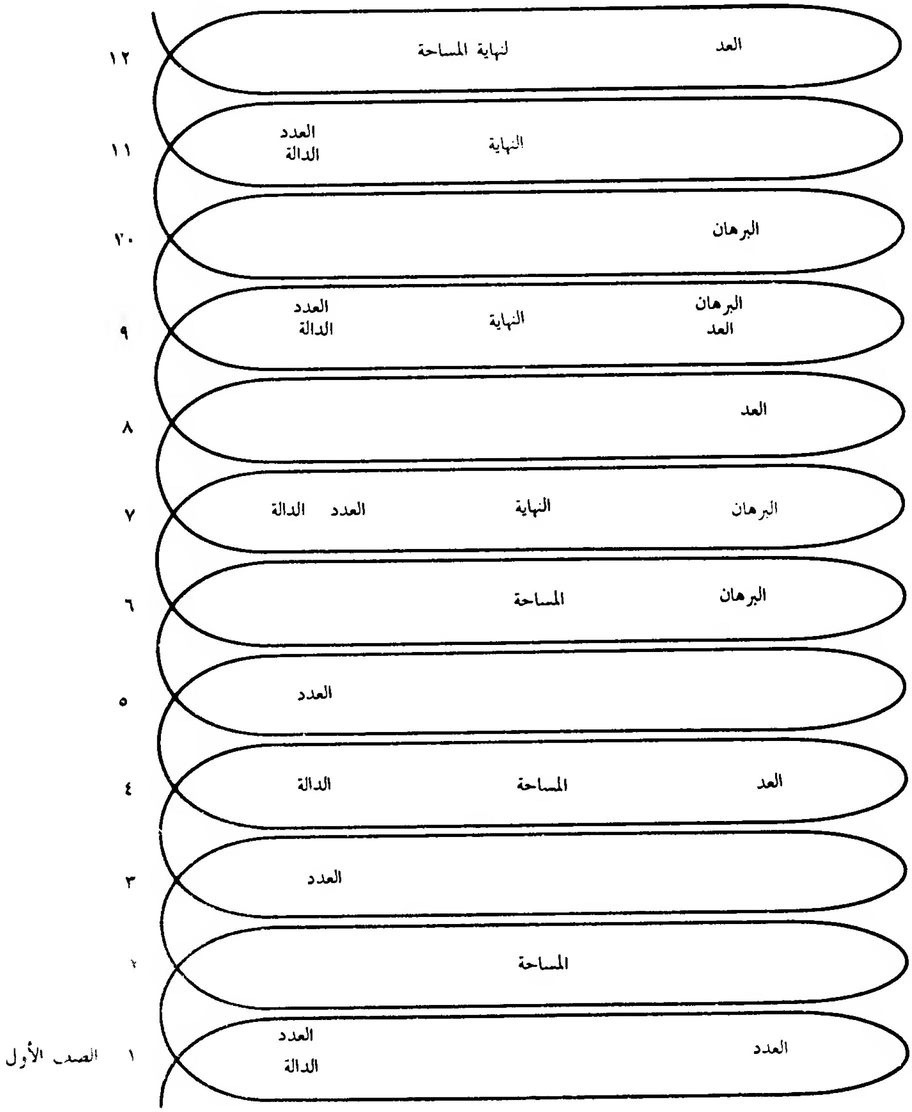
تعريف التعليم والتعلم الحلازونى

لا يمكن تعريف النموذج الحلازونى على أنه تتابع مرتب فى أعمال التعليم والتعلم الخاص بدرس معين لأن المدخل الحلازونى فى تقديم مفهوم أو مبدأ قد يتم على فترة زمنية تمتد عدة شهور أو سنين . النموذج الحلازونى هو نموذج يضم تحته نماذج أخرى لتعليم الرياضيات . ويتميز بإجراء تتابعى لتعليم المفاهيم والمبادىء بحيث أن كل مفهوم وكل مبدأ يقدم ويمثل للطلاب فى شكل سلسلة متتالية من التعاريف والأمثلة والتطبيقات المتصاعدة التجريد والتعميم على فترة زمنية طويلة متقطعة ، كما ظهر فى مثال المساحة الذى يعرف فى المرحلة الابتدائية ثم يعاد تعريفه بالمراحل الثانوية والجامعية .

وعند إستخدام النموذج الحلازونى فإنه يمكن استخدام أى نموذج آخر مناسب فى التعليم والتعلم كمصدر استراتيجيات لتقديم كل درس أو مجموعة دروس فى منهج الرياضيات وبإختصار فإن جوهر النموذج الحلازونى يكمن فى حقيقة أن الكثير من المفاهيم والمبادىء الرياضى تعلم بطريقة أفضل « بحلزنتها » عند نقاط عديدة من المنهج . وعند كل نقطة فى الحلازون حيث يعاد دراسة الموضوع الرياضى مرة أخرى ، يقدم الموضوع على مستوى أعلى من التجريد والعمومية . ويمكن أن تستخدم تطبيقات غير مألوفة كخبرة دافعية للتمثيل الأكثر تجريدا وتعميما للموضوع . كما يمكن تعلم المفاهيم والمبادىء المعاد تعاريفها من خلال أمثلة وتطبيقات جديدة .

أمثلة للمدخل الحلازونى فى تعلم الرياضيات

تعتبر مفاهيم العدد والمساحة والبرهان والدالة والنهاية إلى جانب المبادىء التى تشتمل على هذه المفاهيم من الموضوعات الشائعة فى الرياضيات المدرسية . وكل من هذه المفاهيم نمى فى حلازون تاريخى متتالٍ بواسطة الرياضيين بدءا بتعاريف وتطبيقات معينة ومحسوسة ومرورا بتعاريف وتطبيقات متزايدة التجريد والتعميم . وكلما نمى الطلاب عقليا الأكثر تجريدا أو تعميما لتلك المفاهيم .. ويوضح الشكل التالى (٣ — ٨) النمو الحلازونى لسته مفاهيم أساسية فى الرياضيات المدرسية حيث تمثل كل حلقه من الحلازون مستوى صفايين الصف الأول والصف الثانى عشر .



مدخل حلازونى لستة مفاهيم رياضية الشكل ٣ — ٨

وفيما يلى مناقشة لهذه المفاهيم بحسب المدخل المقترح .

العدد :

يقدم مفهوم العدد لأول مرة فى الصف الأول (الأبتدائى) حيث يتعلم الأطفال العد وذلك بهدف أن يتعرفوا على رموز الأعداد وكتابتها . وفى الصف الثالث بعد أن يكون الأطفال قد تعلموا مجموعة الأعداد الطبيعية يمكن تقديم مفهوم الكسر ، ويمكن للطلاب أن يتعلموا بعض خواص الكسور الموجبة . وبعد تمام الصف السابع يعمم مفهوم العدد ويشمل الأعداد السالبة والكسور . وبعد ذلك ، فى الجبر ، يستمر تعميم نظام العدد ليشمل مفهوم الأعداد الحقيقية الأكثر تجريدا وفى الجبر أو فى المثلثات تستمر عملية التعميم تشمل الأعداد المركبة . ثم بعد ذلك تأتى مفاهيم جديدة مثل المتجهات وهى أكثر تجريدا من مفهوم العدد .

الدالة :

المفهوم الحدسى للدالة يقدم لأول مرة فى الصف الأول الابتدائى وذلك دون إستخدام كلمة دالة . فى هذا المستوى يقوم الأطفال بعمل مزاوجات بين عناصر مجموعتين مثلا : أزواج وزوجات ، أسماء أشخاص وممتلكاتهم ، كذلك يقومون بتجزىء الأشياء إلى مجموعات بحسب خواصها . هذه العملية من الاقترانات والمزاوجات تستمر حتى الصف الرابع حيث تقدم دوال فى صورة مجردة على شكل قوانين لإيجاد المساحات وحل أنواع أخرى من المسائل الحسابية . فى الصف السابع يتم صياغة مفهوم الدالة ويعمم كعلاقة حيث يتم شرح وإستخدام مصطلحى « علاقة » و « داله » فى الصف التاسع يعرف مفهوم الدالة كلغة رياضية ورموز مجردة وتمثل الدوال كأنواع خاصة من العلاقات الجبرية . وفى حساب المثلثات يصبح مفهوم الدالة أكثر تجريدا عندما تعرف الدالة المثلثية كدوال « لف » لخط الأعداد الحقيقية حول دائرة الوحدة .. وهكذا يصبح مفهوم الدالة أكثر تحديدا وتجريدا كما يصبح تمثيله أكثر رمزية بدءا من الصف الأول وانتهاء بالصف الثانى عشر .

النهاية

يبدو أن هناك ميل إلى إهمال مفهوم النهاية فى المدارس ، وذلك على الرغم من أن هذا المفهوم الهام والمفيد يمكن أن يقدم للطلاب حالما يدخلون مرحلة العمليات الشكلية (المجردة) . فيمكن لطلاب الصف السابع أن يدركوا مفهوم النهاية عندما يمثل من خلال متتابعات غير منتهية ومن خلال التمثيل العشرى غير المنته للأعداد . ويمكن أن يحدث مزيد من تعميم المفهوم عند دراسة المتواليات العددية والهندسية . ويمكن فى الهندسة ، أن توضح الدائرة على أنها الوضع النهائى لمتتابعة من المضلعات المنتظمة التى يزداد عدد أضلاعها زيادة لا نهائية . وتظهر النهايات أيضا فى الدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية . ويأتى التمثيل الأكثر تجريدا وتعميما عند دراسة التفاضل والتكامل حين يُعرف التكامل المحدد على أنه مجموعة غير منتهية من النهايات والذى يمكن تسميته « نهاية نهايات » .

المساحة

يقدم مفهوم المساحة مبكرا فى المدرسة الابتدائية حيث تمثل لمساحات على أنها عدد الوحدات المربعة اللازمة لتغطية شكل مستوٍ . وفى الصف الرابع يكون التلاميذ قد وصلوا إلى مرحلة من النضوج العقلى التى تمكنهم من إدراك مفهوم المساحة عندما يعرف ويمثل بواسطة قوانين لإيجاد مساحات أنواع معينة من الأشكال المستوية . وأحيانا يعمم مفهوم المساحة إلى مفهوم النهاية كما هو الحال عند اعتبار مساحة الدائرة. هو نهاية متتابعة من مساحات مضلعات منتظمة داخل دائرة ، وهذا يمكن تقديمه فى المرحلة الاعداية (من الصف السابع إلى التاسع) . وتصل مرحلة التجريد والتعميم أعلاها فى التكامل حيث تمثل المساحة بتكامل محدد .

البرهان

أحد الأهداف الأساسية من تدريس الهندسة بل فى الرياضيات عموما هو أن يتعلم الطلاب أفكار وطرق البرهان الرياضى . ويبدأ معظم التلاميذ فى تكوين مفهومهم — غير اللفظى — عن البرهان من وقت مبكر وعلى الرغم من عدم صحة مفهوم البرهان عند الطفل الصغير فإنه يكون معقولا لديه ويستخدمه فى تكوين تعميماته . فالطفل الصغير يعمم كثيرا من المبادىء التى قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ، وذلك استنادا على حالات خاصة قليلة أو كثيرة . ويقع فى هذا الخطأ كثير من الطلاب حتى فى مراحل متقدمة . ويعتقد بعض الطلاب أن البراهين اقناع من سلطات عليا مثل المدرس والكتاب المدرسى وليست نتيجة المنطق ومن ثم فهم يتلقون البراهين ويستظهر ولأن مفهوم البرهان ليس سهلا فيجب ألا يفرض على الطلاب قبل أن يكونوا مستعدين لذلك عقليا . وكما هو الحال فى تعلم كثير من المفاهيم الأخرى ، فإنه ينبغى أن يقدم مفهوم البرهان بإستخدام المدخل الحلازونى . ومع التدرج لابد أن توضح طريقة الاقناع التى تمثل برهانا والتى لا تمثل برهانا بالمعنى الرياضى الصحيح .

العَد

يتعلم التلاميذ العد حتى قبل أن يبدأوا المدرسة ويحتاج الأطفال إلى الكثير من المران على عد مجموعات من الأشياء قبل أن يصبح العد له معنى عند أطفال الصف الأبتدائى .

ومن المحتمل أن يكون معظم الطلاب فى الصف الرابع أصبحوا مستعدين لفهم الفرق بين عشرة أشياء فى مجموعة (العدد الكاردينالى لمجموعة) والشيء العاشر فى قائمة (عدد الرتبة لهذا الشيء) ، وذلك دون لزوم لإستخدام كلمة « كاردينالى » و « رتبوى » فى هذه المرحلة . وعند الصف السابع أو الثامن يكون معظم الطلاب مستعدين لفهم وتقويم طريقتى العد وهما : العد كمتتابعة مرتبة من الأعداد الطبيعية ، والعد عن طريق التناظر الأحادى بين عناصر مجموعتين . هناك طلاب قد يصلون إلى نهاية المرحلة الثانوية قبل أن يصلوا إلى فهم حقيقى للمجموعات غير المنتهية ورتب اللانهاية والتناظرات الأحادية لمقارنة رتب المجموعة غير المنتهية . ويجب أن يعمم مفهوم العد تدريجيا من

الأعداد الكاردينالية إلى الرتبوبة ومن الأعداد المنتهية إلى غير المنتهية . ويستبقى تجريد مفهوم العد إلى مقارنة رتب اللانهاية من خلال التناظرات الأحادية حتى يصل الطلاب إلى مرحلة العمليات الشكلية ونضوج عمليات التفكير المجرد عندهم .

والمفاهيم الست : العدد والدالة والنهاية والمساحة والبرهان والعد مترابطة . ومع تقديم ومناقشة وتمثيل بعض المفاهيم معا يمكن أن تتكون المبادىء الرياضية من مجموعة من المفاهيم وذلك من مستويات مختلفة من التجريد والتعميم .

وأيا كانت الاستراتيجية المستخدمة فى تدرب المفاهيم والمبادىء الرياضية فإن يجب أن تعرف (كمثل كل خبرة رياضية)عند مستوى مناسب من التجريد والتعميم يكون مناسبا لمرحلة النمو العقلى للطالب إن تكوين المفهوم عملية تدريجية وطويلة المدى ومن الأفضل أن يستخدم فيها النموذج الحلازونى .

الخلاصة :

النماذج والاستراتيجيات الستة لتعليم وتعلم الرياضيات التى قدمت فى هذا الفصل (وهى العرض المباشر ومنظم الخبرة المتقدم والاكتشاف والألعاب والتفريد والحلازونى) جميعها مناسبة لتعليم وتعلم الخبرات المباشرة فى الرياضيات وهى الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء . وحيث أن الحقائق متضمنة فى المهارات والمفاهيم والمبادىء فإن كل هذه النماذج والاستراتيجيات يمكن أن تستخدم فى تدريس الحقائق يمكن استخدام نموذجى العرض المباشر ومنظم الخبرة المتقدم فى تدريس المهارات والمفاهيم والمبادىء . ونموذج الاكتشاف مناسب لتعلم المفاهيم والمبادىء . استراتيجيات الألعاب تكون أكثر فائدة فى التدريب على المهارات ، ومع ذلك فمن الممكن أن تستخدم فى تدريب المفاهين والمبادىء أيضا . ويمكن أن يستخدم نموذج التعليم الفردى فى اختيار المصادر والطرق المناسبة لأفراد الطلاب بحسب سماتهم المتفردة فى التعلم ؛ والبرامج الفردية مناسبة لتعليم الحقائق والمهارات ولكن يمكن استخدامها أيضا لتعليم المفاهيم والمبادىء . والهدف الأكبر من النموذج الحلازونى هو تدريس تلك المفاهيم والمبادىء التى ينبغى أن تقدم بصورة متقطعة على مدى فترة طويلة من الزمن على مستويات متتالية من التعميم والتجريد .

وعلى الرغم من أن هذه النماذج ليست مصممة لتدريس الخبرات غير المباشرة فى الرياضيات ، كان كلا من هذه النماذج الست يمكن أن تستخدم فى تعليم وتعلم خبرة واحدة على الأقل من الخبرات غير المباشرة مثل البرهنة النظرية ، وحل المشكلات ، وإنتقال أثر التعلم ، وتلعم كيف تتعلم ، والنماء العقلى ، والعمل الفردى ، والعمل الجماعى ، وتنمية الاتجاهات الإيجابية .

تمارين وأنشطة

(١) تخير مهارة أو مفهوم أو مبدأ فى الرياضيات ثم أعِدْ استراتيجية للعرض المباشر لتعليم وتعلم هذه الخبرة ، بينما الأنشطة المتضمنة فى استراتيجيتك .

(٢) تخير مبدأ رياضيا ثم كون منظم خبرة متقدم مقارن لتقديم هذا المبدأ . اقترح استراتيجية متابعة مناسبة لتستخدم بعد تقديم المنظم .

(٣) تخير مهارة رياضية وخد منظم عرض مباشر لهذه المهارة ، مبينا الأنشطة التى تلى تقديم المنظم .

(٤) أذكر خمسة مواضيع من فروع رياضية مختلفة يمكن دتريسها بإستخدام استراتيجية الاكتشاف .

(٥) أعد خطة لدرس اكتشاف لتدرب أحد الموضوعات التى تختارها .

(٦) ابحث فى المراجع عن :

(أ) خمسة ألعاب لحل ألغاز ومغالطات

(ب) خمسة ألعاب للتدرب على المهارات

(جـ) يضع ألعاب تخمين لتعلم مفاهيم ومبادىء من اختيارك

(د) خمسة ألعاب لتعلم مبادىء المنطق

(هـ) لعبتين لتعلم التقدير التقريبى

(٧) أعد خطة لتدرب أحد الدروس بإستخدام استراتيجية الألعاب .

(٨) أعد خطة لتدرب أحد الدروس بإستخدام النموذج الفردى

(٩) حدد خمس طرق لتفريد الواجبات المنزلية

(١٠) ناقش ثلاثة أساليب من التقويم القبلى ومثلها فى التقويم البعدى فى نموذج التعليم الفردى .

(١١) تخير مفهوما رياضيا ثم أعد سلسلة من الأنشطة لتقديم هذا المفهوم بإستخدام النموذج الحلازونى فى مرحلتى التعليم الأساسى والثانوى .

(١٢) تخير أحد المفاهيم ثم اعطِ تعاريف متدرجة من المستوى البسيط وحتى المستوى المجرد مع اقتراح موقع ومرحلة تدرب كل تعريف .

الفصل الرابع

نماذج لتعليم وتعلم الخبرات غير المباشرة
فى الرياضيات

- **نموذج البرهنة النظرية**
  ماهو البرهان ؟
  لماذا يدرس البرهان ؟
  طرق البرهنة .
- **نموذج تعليم وتعلم حل المشكلات**
  ماهو حل المشكلات ؟
  لماذا حل المشكلات فى الرياضيات المدرسية ؟
  استراتيجات تعليم وتعلم حل المشكلات الرياضية .
- **النموذج المعملى للتعليم والتعلم**
  أهداف استخدام معامل الرياضيات .
  استراتيجات التعليم والتعلم لمعامل الرياضيات .
  التيسيرات والمصادر اللازمة لمعامل الرياضيات .
- **النموذج الاستقصائى للتعليم والتعلم**
  مراحل عملية الاستقصاء .
  طرق تعليم وتعلم الإستقصاء .
  درس إستقصائى فى موضوع الإحتمالات .
- **نموذج العمليات الجماعية للتعليم والتعلم**
  أهداف نموذج العمليات الجماعية
  سمات نموذج العمليات الجماعية
  مراحل نموذج العمليات الجماعية
  تدريس الطلاب العمل فى جماعات
  المشكلات الخاصة التى تعترض الأنشطة الجماعية
- **نموذج التعليم المزود بالكومبيوتر**
- **تمارين وأنشطة**

Σ

نماذج لتعليم وتعلم الخبرات غير المباشرة فى الرياضيات

Models For Teaching and Learning The Indirect Objects of Mathematics

إن الخبرات المباشرة المستهدفة فى الرياضيات – الحقائق والمهارات والمبادىء والمفاهيم – يمكن أن تُدرس باستخدام نماذج العرض الالقائى ومنظم الخبرة المتقدم والاكتشاف والالعاب والتفريد والنموذج الحلازونى ويمكن لهذه النماذج التدريسية أن تؤدى أيضا إلى تعلم الخبرات غير المباشرة المستهدفة فى الرياضيات : البرهنة النظرية ، حل المشكلات ، انتقال أثر التعلم ، تعلم كيفية التعلم ، إنماء الثقافة العقلية ، العمل الفردى ، العمل الجماعى ، والاتجاهات الايجابية . ومع ذلك فإن نماذج البرهنه النظرية ، حل المشكلات ، الاستقصاء ، النموذج المعملى ، العمليات الجماعية ، التدريس المزود بالكمبيوتر هى على وجه الخصوص نماذج مناسبة لتعليم وتعلم الخبرات غير المباشرة فى الرياضيات . وهذا ماسوف يتضح فى هذا الفصل مع ملاحظة أن كلا من هذه النماذج يمكن استخدامه فى تدريس العديد من الخبرات المباشرة وغير المباشرة .

نموذج البرهنة النظرية

إن أهم نشاط يقوم به الباحثون وعلماء الرياضيات هو ابتكار رياضيات جديدة والكشف عن علاقات بين البنيات الرياضية ويلى ذلك فى الأهمية برهان النظريات الجديدة لإثبات صدق وصلاحية العلاقات التى تم إكتشافها .

وتتضح أهمية برهنة النظريات فى التأكيد على تعلم طرق وأساليب البرهان فى رياضيات المرحلة الثانوية .

ولعلنا لانكون مبالغين إذا قلنا أن السبب الرئيسى فى تدريس الهندسة فى المدرسة الثانوية هو تدريس التلاميذ بعض عناصر النقاش والتفكير الاستنباطى التى تستخدم فى البراهين الرياضية كما تستخدم فى المناقشات اليومية العادية .

وعلى الرغم من أن برامج الرياضيات لاتقدم براهين نظرية شكلية إلا مع تقديم مقرر الهندسة المستوية (النظرية) إلا أن معظم التلاميذ يتكون لديهم فكرة حدسية عن البرهان قبل دراستهم الهندسة المستوية . يبدأ التلاميذ دراستهم للهندسة المستوية ولديهم فكرة ذاتية عن البرهان مؤداها « إذا أقتنعت بقضية ما فإنها تكون صواباً » أو « إذا ذكرت قضية مافى الكتاب المدرسى فإنها يجب أن تكون صواباً » إن عدداً كبيراً من التلاميذ فى المرحلة الثانوية ينتهون من دراسة مقررات الهندسة دون فهم لطبيعة البرهان الرياضى .

هناك أسباب عديدة لوجود أفكار غير صحيحة أو غير مكتملة عند التلاميذ عن البرهان :

(١) ارتباط نمو مفهوم البرهان بمراحل النمو العقلى . فالتلاميذ فى مرحلة التمركز حول الذات (من النمو العقلى) يميلون إلى قبول صحة قضية مإذا بدت لهم كذلك . والتلاميذ فى مرحلة التفكير المحسوس قد يقبلون بصحة قضية عامة حتى لو كانوا قد رأوا صحة القضية فى حالات خاصة فقط . وحتى التلاميذ فى مرحلة التفكير المجرد (الشكلى) قد يقبلون صحة النظرية مستندين فقط إلى ورودها فى الكتاب المقرر أو لأنها صدرت عن المعلم .

(٢) لكى يكون للبرهان معنى عند التلاميذ لابد وأن يكون لديهم شك فى صحة القضية المعروضة وأن يكون لديهم رغبة فى القضاء على هذا الشك . فحينما تكون صحة القضية واضحة للتلميذ فإن البرهنه على صحتها يبدو وكأنه مجرد واجب يرضى به المعلم وحتى عندما لاتكون صحة القضية واضحة فإن بعض التلاميذ لايهمهم إقامة برهان قوى على شيء لايهمهم صوابه أو خطأه ، إذ أن اهتماماتهم تنصب على ماهو صواب وعلى كيفية إستخدام الحقائق والمهارات التى تصل بهم إلى الاجابات الصحيحة عند حل تمارين الرياضيات ولايحبون أن ينشغلوا ببراهين لاتثير أهتماماتهم ولاتعنى شيئاً بالنسبة لهم . وعلى النقيض لما يعتقده بعض الرياضين والتربويين ، فإن الكثير من تلاميذ المرحلة الثانوية لديهم اهتمامات قليلة فى تعلم الأسباب وراء صحة القوانين الرياضية . ويمكن أن تُنمى بالتدريج فى هؤلاء التلاميذ حاسة حب استطلاع عن الرياضيات عن طريق استخدام أسئلة وأنشطة مثيرة داخل الفصل .

(٣) كثير من المعلمين لا يدرسون الطرق المختلفة للبراهين الرياضية بأسلوب محبب وحيث أن التلاميذ لم يكوّنوا مفهوماً متكاملاً أو دقيقاً عن البرهان قبل دراستهم للهندسة النظرية ، فإن الأمر يحتاج أن تُقَدم لهم البراهين النظرية من خلال عرض منظم وتحليل للأنواع المختلفة للبرهان الرياضى . وعلى الرغم من أن مدرسى الحساب والجبر يمكنهم مساعدة التلاميذ تصاعدياً فى تكوين أفكار دقيقة عن أنماط المناقشات التى تكوّن برهاناً صالحاً إلا أن الكثير من التلاميذ لايكونون قد وصلوا إلى

درجة من النضوج تمكنهم من التمييز بين البرهان الرياضى الصحيح وبين المناقشة المقنعة والتى قد لاتكون صالحة رياضياً كطريقة للبرهان . وفى سن ١٥ أو ١٦ سنه يصل معظم التلاميذ إلى درجة من النضوج العقلى تمكنهم من فهم المناقشات المنطقية الشكلية القوية .

ومع ذلك فإن الأمر يحتاج إلى بذل جهد كبير من جانب المعلمين فى القضاء على المفاهيم غير الصحيحة عن البرهان عند تلاميذهم ، وفى تدريسهم البرهان بمعناه الرياضى الصحيح إذ أن تنمية مفهوم البرهان الرياضى القوى عند التلاميذ يتطلب استراتيجية التدريس الحلزونى على مدار عدد من السنين .

طبيعة البرهان : –

قبل مناقشة الأسباب التى تدعو إلى تدريس البرهان وكيفية تعلم التلاميذ للبراهين الرياضية الصحيحة سوف نتعرض إلى طبيعة البرهان والأنواع المختلفة للبراهين الرياضية .

فالبرهان – على وجه العموم – هو أية مناقشة أو تقديم لشواهد تُقنع شخصا ما بقضية معينة . ويمكن التعرف على ستة محكات على الأقل تستخدم على أنها برهان مقنع لقبول قضية ما : –

(١) **الخبرة الشخصية** : ففى البلاد ذات المناخ البارد مثلا يكون سقوط أول كرة من الجليد دليل مقنع على تساقط الجليد .

ومع أن الخبره الشخصيه قد تكون طريقة صالحة فى التحقق من صحة حالات خاصة أو البرهنة على ذلك إلا انها لاتكون صالحة للبرهنة على التعميمات .

(٢) **قبول ما يصدر عن أصحاب التخصص أو مصادر السلطة** : وهو نوع آخر يستخدمه البعض للتدليل على صحة قضية ما . فنحن نتقبل أحكام الأطباء مثلًا على أن دواء معيناً يُعالج مرضاً بعينه . بل هناك من يتقبل ما يسمعه فى التليفزيون عن علاج مبتكر لبعض الأمراض . وتمثل الكلمة المطبوعة مصدراً قَوياً للإقناع بصحة ماهو مكتوب فليس من المستغرب أن معظم التلاميذ يتقبلون ماهو مكتوب فى كتبهم المدرسية على أنه صحيح تماماً .

ويميل الناس أيضاً إلى تقبل صحة التقارير التى ترد فى الصحف والمجلات ويفسر البعض أسباب نجاح بعض الاعلانات برغبة الناس لتقبل المعلومات التى تقدم لهم عن مصادر سلطة أو نتيجة خبرات شخصية لآخرين .

(٣) **تعميم الحالات الخاصة** : هناك بعض الناس يقبلون ما يشاهدونه فى مواقف معينة على أنه برهان على صحة قضية عامة . فهناك من يصدر تعميماً بإن معظم المدرسين لايعتنون بتلاميذهم ، ويبنون هذا التعميم على مشاهدتهم لحالات معينة يكون الأهتمام الأساسى للمعلم فيها هو الدروس الخاصة . وصغار التلاميذ – بل الكثير من طلاب المدرسة الثانوية – يستخدمون مشاهدتهم لبعض المواقف

الخاصة على أنها براهين لقضايا عامة . ففى خبرتهم المحدودة يكون التعميم صحيحاً على الأطلاق إذا ما تحقق فى مواقف خاصة .

(٤) **عدم وجود مثال مضاد** : وهذه طريقة آلية يستخدمها الناس للتدليل على صحة شيء ما ويميل التلاميذ لإستخدام هذه الطريقة لتبرير استخدامها لبعض الطرق الآلية لحل أنواع معينة من التمارين . فطالما لم يواجهوا حالة تفشل فيها الطريقة التى يستخدمونها لمسألة ما فأن الطريقة تكون صحيحة على الأطلاق . وحتى الرياضيين يقبلون بصحة فرض ما طالما أنه لم يقدم أى رياضى آخر مثالًا مضاداً منذ ظهور هذا الفرض ومن أمثلة ذلك :

« فرض الألوان الأربعة » والذى يقول بأن أربعة ألوان تكون لازمة وكافية لتكوين كل الخرائط المرسومة فى مستوى بحيث لاتأخذ أى منطقتين لهما حدود مشتركة نفس اللون . وحيث أنه حتى الآن لم يقدم أحد اية خريطة مستوية يمكن تلوينها بحيث تناقض هذا الفرض ، فإن كثيراً من الرياضيين يعتقدون أنه من المحتمل أن يكون الفرص صحيحاً .

(٥) **الاستخدام المفيد للنتائج** : وينطبق ذلك على بعض طرق حل المعادلات التفاضلية والتى كانت تقبل على أنها صحيحة – دون أعطاء برهان رياضى يثبت صحتها – ذلك لأن تلك الطرق كانت تفيد فعلًا فى الوصول إلى حلول رياضية لبعض المشكلات الفيزيائية . وقد أعتبرت تلك الطرق صحيحة لأنها خدمت أغراضاً مفيدة .

(٦) **المناقشة الاستنباطية** : وهذه هى طريقة البرهان المقبولة فى الرياضيات ، فالتقرير أو القضية التى تبنى على أى من الأنواع الخمسة السابقة من الاقناع يمكن أن تكون غير صحيحة ، ومع ذلك فإن أى نتيجة تبنى على الاستنباط تكون صحيحة بشرط أن الفروض التى تشتق منها النتيجة تكون أيضاً صحيحة .

ويميل الكثير من مدرسى الرياضيات إلى جعل تلاميذهم يعتقدون بأن المناقشة الاستنباطية هى الطريقة الوحيدة الصحيحة والهامة فى البرهان . إن الأمر ليس كذلك (فى كثير من المجالات غير الرياضية) فالرياضيات هى – فى الحقيقة – المجال الوحيد الذى تعتبر فيه الطريقه الأستنباطية هى الطريقة الوحيدة الصحيحة فى البرهان . إلا أن الكثير من المبادىء السياسية والاجتماعية تستند إلى الخبرة الشخصية وإلى مصادر السلطة وأصحاب التخصص . وتعتبر المشاهدات لحالات خاصة وعدم وجود امثلة مضادة من الطرق الصحيحة للتحقق من صحة العلاقات والقوانين فى العلوم الفيزيائية . وإيجابية النتائج تعتبر تبريرات صحيحة لبعض المبادىء التى تستخدم فى علوم المهندسين .

لذلك فإنه بدلًا من محاولة إبراز البرهان الاستنباطى على أنه الطريقة الوحيدة للعليةّ ، يكون من الأمثل أن تشرح للتلاميذ أن طبيعة الرياضيات وتركيبها هى التى تجعل من البرهان الاستنباطى الطريقة الوحيدة المقبولة للبرهنة فى هذا المجال .

وهناك حدود لكل أنواع البرهان السابقة بما فى ذلك البرهان الاستنباطى فالبرهان الرياضى – على الرغم منذ أنه مبنى على مناقشات منطقية – إلا أنه ينتهى باشتقاق نتائج من فروض . فإذا أفترضنا صحة مجموعة من الفروض فإنه يمكننا إستخدام المناقشات الأستنباطية الصحيحة لإثبات صحة النتائج – وتمثل صياغة اقليدس للهندسة المستوية نقطة البدء التاريخية لإعتبار البرهان الأستنباطى على أنه الطريقة السليمة للبرهان فى الرياضيات .

ومع ذلك فإنه لأمر محير إلى حد ما أن نجد أن الهندسة المستوية تعطى المثل الرئيسى لقسرية (وضعية) الفروض الأساسية ، وذلك عندما ترك الرياضيون تماماً محاولة أثبات مسلمات أقليدس وبديهياته ووضعوا مسلمات تناقض مسلمة التوازى وخلقوا نظاماً رياضياً متفقاً (غير متناقض) من الداخل يتناقض مع الكثير من النظريات الاقليدية الهامة . وكما هو الحال فى إمكانية وجود نظم سيا سية متناقصة متعايشة فى نفس الوقت فى دول مختلفة – فإمه يمكن أن توجد آنيا نظم رياضية متناقضة . ونظراً لأن الطرق الاستنباطية هى التى تستخدم فى البراهين الرياضية فإننا سوف نناقشها بالتفصيل وذلك بعد أن نعرف المقصود بالمصطلح « مناقشة استنباطية » وقبل ذلك سوف نشرح معنى المصطلحين صدق (Truth) ، صلا- ية (صِحة) (Validity) .

الصدق :

الصدق هو احد خواص التقارير (العبارات) ولكن الصلاحية أو الصحة هى خاصية للمناقشة نفسها وقيم الصدق إما صواب (= ١) أو خطأ (= ٠) هى قيم تعطى للتقارير أو العبارات فى ضوء قوانين المنطق أو طبقاً لما أتفق عليه ، وتوصف عبارة مابأنها « صواب » عندما تصف هذه العبارة حقيقة ما وصفاً صحيحاً أو ما أتفق على أنه وصف مقبول للحقيقة . فعندما نشاهد ظلّا لشجرة ما وتقول هذا ظل الشجرة فإنك بذلك تعطى وصفاً صحيحاً لحقيقة . ولذلك فإن هذه العبارة تأخذ قيمة الصدق « صواب » وعندما يكون الجو صافياً ولاتوجد أمطار وتقول « السماء تمطر » فإن هذه العبارة تأخذ قيمة الصدق « خطأ » . وفى الهندسة الاقليدية العبارة من نقطة خارج خط مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد واحد فقط ماراً بالنقطة وموازياً للخط المستقيم المعلوم تمثل أتفاقا على أنها عبارة صحيحة وقيمة صدقها (صواب) ونفس العبارة تعطى قيمة الصدق « خطأ » فى الهندسة اللاإقليدية . فكل نظام رياضى مبنى على مجموعة وحيدة من العبارات (المسلمات) قيمة الصدق المعينه لكل منها « صواب » . وعلى الرغم من أن العبارات تأخذ قيما للصدق أو الخطأ إلا أنها لاتوصف بأنها صالحة أو غير صالحة .

الصلاحية :

الصلاحية خاصية من خواص المناقشات ، والمناقشة مجموعة من العبارات ويقال إن مناقشة ما صالحة إذا كانت مبنية على مبادىء مقبولة من التضمين المحتواة فى نظام منطقى شكلى . وتتضح هذه التعاريف من الأمثلة التالية لبعض المناقشات :

المثال الأول : مناقشة (١) – صالحة ، لأنها تستند إلى قانون الوضع المنطقى وهو مبدأ صادق منطقيا

العبـــــارات	قيم الصدق
١ – هذا الشكل مربع (معطيات)	صواب
٢ – إذا كان شكل ما مربعاً يكون له أربع زوايا قوائم	صواب
٣ – اذن ، هذا الشكل له اربع زوايا قوائم (نتيجة)	صواب

المثال الثانى : مناقشة (٢) – غير صالحة ، لأنها تستند إلى مبدأ غير مقبول فى المنطق

العبـــــارات	قيم الصدق
١ – هذا الشكل معين (معطيات)	صواب
٢ – إذا كان الشكل معيناً يكون له أربعة أضلاع متساوية .	صواب
٣ – إذا كان الشكل مربعا يكون له أربعة أضلاع متساوية .	صواب
٤ – إذن ، هذا الشكل مربع	خطأ

وسوف نعرض فيما يلى « المناقشة الإستنباطية » وهى النوع الوحيد المقبول (من طرق الاقناع السابق ذكرها) فى البراهين النظرية فى الرياضيات .

والمناقشة الاستنباطية : هى صيغة مناقشة صالحة تُجرى على مجموعة من الفروض (المعطيات) التى يفترض أنها صواب وتتتابع حتى تنتهى إلى مجموعة من النتائج التى تشتق منطقياً من الفروض .

وبالنسبة للتلاميذ وحتى للرياضيين فإن الصعوبة الأولى التى تسبق برهنة النظريات هى تحديد مكونات المناقشة الاستنباطية الصالحة . هناك صنفان عامّان للبرهان الأستنباطى – البرهان بأستخدام المناقشات المباشرة (البرهان المباشر) والبرهان بالتناقض .

وفيما يلى سنعرض تسعة أنواع من البرهان الأستنباطى ، سبعة إنواع من نوع البرهان المباشر ونوعين من البرهان بالتناقض ، وكل هذه الأنواع من البراهين تستخدم فى رياضيات المرحلة الثانوية (والمرحلة الأخيرة من المرحلة الأعدادية) .

أنواع البرهان الأستنباطى : –

أ – البرهان المبشر (المناقشة المباشرة) :

(١) قانون الوضع المنطقى Modus Ponens
(٢) الأنتقالية
(٣) قانون الرفع المنطقى Modus Tollens
(٤) نظرية الأستنباط
(٥) عكس النقيض
(٦) البرهان باستنفاذ الحالات
(٧) الاستنتاج الرياضى

ب – البرهان بأثبات استحالة التناقص

(٨) المثال المضاد .
(٩) البرهان غير المباشر

(١) قانون الوضع المنطقى :

يعتبر قانون الوضع المنطقى أسهل أنواع البرهان الاستنباطى فَهْماً عند التلاميذ لأنه يحتوى فقط على ثلاث عبارات . والتركيب المنطقى لهذا النوع يكون كالآتى حيث ق ، ك [p and q] تمثل عبارات) :

إذا كانت ق صوابا [p is true]

وإذا كانت ق ← ك صوابا [p implies q]

فإن ك صواب [q is true.]

ويعبر عن ذلك بالرموز كالآتى : $\frac{\text{ق ، ق} \leftarrow \text{ك}}{\text{ك}}$ $\left[\frac{p, p \rightarrow q}{q} \right]$

مثال :

لنفرض أن طالباً يريد اثبات أن الشكلين البيانيين للدالتين :

ص = س + ٤ ، ص = ٢س – ١ [$y = x + 4$ and $y = 2x - 1$] يتقاطعان .

إن أحد الطرق غير الدقيقة هى أن نمثل الدالتين بيانياً على مستوى إحداثى ونرى ما إذا كان المستقيمان الممثلان لهما يتقاطعان أم لا ؟

إلا أن هناك طريقة دقيقة وصالحة ، وهى استخدام طريقة قانون الوضع الاستنباطية فى البرهان وذلك كما يلى :

(ق) [(d)] ميل كل من المستقيمين هما ١ ، ٢ وهما عددان مختلفان

(ق ← ك) [$(p \rightarrow q)$] : إذا كان الميلان لمستقيمين مختلفين فإن شكلهما البيانيين يتقاطعان .

إذن (ك) [(q)] : الشكلان البيانيان للدالتين يتقاطعان

وهذه المناقشة صالحة لأنها تستند إلى المبدأ العام الذى أسميناه قانون الوضع والذى بدوره صالح منطقياً .

(٢) الإنتقالية :

كثيراً ما يجد التلاميذ أن البرهان ذا الخطوات الثلاثة والمبنى على صيغة صالحة للمناقشة والتى تسمى الإنتقالية ، هو برهان منطقى وسهل الفهم لأنه كثير ما يستخدم فى مجالات أخرى خارج الرياضيات . والتركيب المنطقى للإنتقالية هو كالآتى (حيث ق ، ك ، س [p, q, and r] تمثل عبارات) :

إذا كانت ق ← ك [p implies q] صواب

إذا كانت ك ← س [q implies r] صواب

فإن ق ← س [p implies r] صواب ،

ويعبر عن ذلك بالرموز كالآتى : $\frac{(\text{ق} \leftarrow \text{ك})\text{ ، }(\text{ك} \leftarrow \text{س})}{\text{ك} \leftarrow \text{س}}$ [$\frac{p \rightarrow q,\ q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$]

مثـال :

بفرض صحة النظريتين التاليتين :

ق ← ك [$p \rightarrow q$] : إذا ساوى قياساً زاويتين فى مثلث ما قياسى زاويتين فى مثلث آخر (ق) [(p)] فإن قياسات الزوايا الثلاث المتناظرة فى المثلثين تتساوى (ك) [(q)]

ك ← س [$q \rightarrow r$] إذا تساوت قياسات الثلاث زوايا فى مثلثين (ك) [(q)] فإن المثلثين يكونان متشابهين (س) [(r)]

إذن ق ← س [$(p \rightarrow r)$] : إذا ساوى قياساً زاويتين فى مثلث ما قياسى زاويتين فى مثلث آخر (ق) [(p)] فإن المثلثين يكونان متشابهين (س) [(r)]

وهذا البرهان يستند إلى مبدأ الإنتقالية فى المنطق وهو :

[(ق ← ك) ، (ك ← س)] [$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r$] ⟵ (ق ← س) [$p \rightarrow r$]

وهو مبدأ صالح منطقياً .

(٣) قانون الرفع المنطقى :

وهذه الصورة صعبة الفهم إلى حد ما بالنسبة لبعض التلاميذ أكثر من صورة قانون الوضع المنطقى ، وهذا القانون أسلوب صالح منطقياً للبراهين ، وصورة قانون الرفع هى كالآتى (حيث ق ، ك [p, q] عبارات ، ~ق ، ~ك [$\sim p$ ، $\sim q$] نفيها على الترتيب) :

إذا كانت ق ← ك [$p \to q$] صواب

وإذا كان ~ك [$n\,q$] صواب

فإن ~ق [$n\,p$] صواب

ويعبر عن ذلك بالرموز كالآتى : $\dfrac{\text{ق} \leftarrow \text{ك} ، \sim\text{ك}}{\sim\text{ق}}$ [$\dfrac{p \to q, \sim q}{\sim p}$]

مثال :

نعلم أنه إذا كان ن [n] له عدداً زوجياً فإن ن^2 [n^2] يكون عددا زوجياً . وبفرض أن عدداً ما وليكن ا^2 [k^2] غير زوجى فإنه عن طريق قانون الرفع يمكن استنتاج أن ا [k] عدد غير زوجى .

حيث يطبق قانون الرفع رمزياً كالآتى :

ق ← ك $(p \to q)$: إذا كان له عدداً زوجياً فإن ن^2 [n^2] يكون عدداً زوجياً (صواب)

~ك $(\sim q)$: ليكن ا^2 [k^2] عدداً غير زوجى (صواب)

إذن $(\sim p)$: ا [k] عدد غير زوجى

وقد استخدم هذا النوع من البرهان فى إثبات أن $\sqrt{2}$ عدد غير نسبى .

(٤) نظرية الاستنباط :

على الرغم من أن نظرية الاستنباط تستخدم كأساس للعديد من البراهين فى الهندسة إلا أنه من النادر أن يشرحها المعلمون لتلاميذهم . ليس هذا فحسب بل إنهم نادراً ما يشيرون إليها ، ويمكن صياغة نظرية الاستنباط كما يلى :

إذا استطعنا أن نستنبط من فرض ما وليكن ف $[p]$ ومن مجموعة من العبارات ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ، كن $[q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n]$ أن ر $[r]$ فإنه يكون من الممكن أن نستنبط من العبارات ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ، كن $[q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n]$

أن ف ← ر $[p \to r]$ ويعبر عن ذلك بالرموز كالآتى :

(ف ، ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ، كن) ← ر
―――――――――――――――――――
(ك١ ، ك٢ ، ك٣ ، ... ، كن) ← (ف ← ر)

$$\left[\frac{(p, q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n) \to r}{(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n) \to (p \to r)} \right]$$

وعند تطبيق نظرية الاستنباط لبرهان نظرية ما فإن المناقشة المنطقية تسير كلآتى :

إذا ما كانت المعطيات ومجموعة من العبارات الصواب المستخدمة فى البرهان (مثل المسلمات والفروض والتعارف والفطريات السابقة) توصلنا إلى النتيجة ، فإن مجموعة العبارات وحدها تؤدى إلى الاستنتاج بأن :

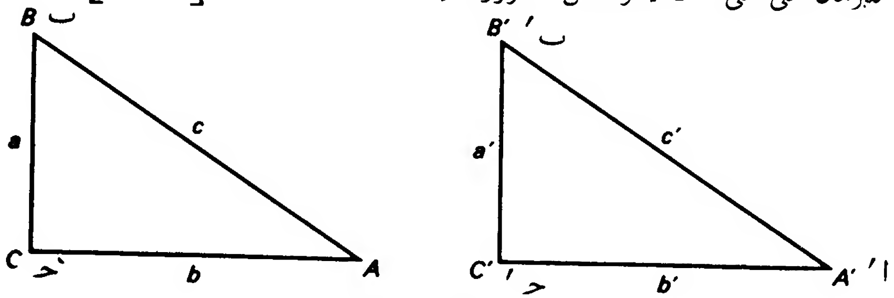
معطيات النظرية تؤدى إلى صحة المطلوب فيها .

ولو لم تكن النظرية الاستنباطية قد ثبت صلاحيتها لأعتُبِرت معظم البراهين الهندسية غير صالحة . ففى براهين القضايا الهندسية لايكون المطلوب هو البرهان على صحة النتيجة بل المطلوب هو البرهان على صحة النظرية بأسرها .

مثال :

أُعتبر القضية الهندسية القائلة بأن « إذا ساوى طولا ساقين فى مثلث قائم الزاوية طولى ساقين متناظرين فى مثلث آخر قائم الزاوية (ف) $[(p)]$ كان المثلثان متطابقين (ر) $[(r)]$.

للبرهان على على ذلك يكون من الضرورى إثبات أن « ف ← ر» $[p \to r]$



شكل ٤ — ١

ويسير البرهان باستخدام نظرية الاستنباط كالآتى :

(١) ب حـ = ب' حـ' ، احـ = ا' حـ' [ق] عبارات صواب لأنها معطيات فى منطوق النظرية .

(٢) قياس < حـ = قياس < حـ' [ك١] عبارة صواب لأن كلّا منها قائمة من المعطيات .

٣ - △ △ ا ب حـ ، ا' ب' حـ' [$ABC \quad A'B'C'$] يتطابقان لأن المثلثين يتطابقان إذا ساوى طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما نظائرها فى المثلثين [(ق ، ك١) ← ر]
[$(p, q_1) \rightarrow r$]

٤ - بتطبيق نظرية الاستنباط :

العبارة السابقة [(ق ، ك١) ← ر [$(p, q_1) \rightarrow r$] تؤدى إلى صحة القضية إذا ساوى طولا ساقين فى مثلث قائم الزاوية طولى ساقين مناظرين فى مثلث آخر قائم الزاوية كان المثلثان متطابقين .

أى أن (ق ، ك١) ← ر [$(p \text{،} q_1) \rightarrow r$] تؤدى إلى أن :
ك١ ← (ق ← ر) [$q_1 \rightarrow (p \rightarrow r)$]

ومن الواضح أن الخطوة الأخيرة هى ضرورة منطقية لإثبات أن ق [p] تؤدى حقيقة إلى ر [r]

والخطوة السابقة تحقق أن ق ، ك١ [p and q_1] معاً تؤدى إلى (ر) [(r)] ولكن لاتعنى أن ق [p] وحدها تؤدى إلى ر [r]

ونظرية الاستنباط تسمح لنا باشتقاق العبارة الأخيرة وهى القضية المطلوب إثباتها .

والخطوة الأخيرة التى طُبقت فيها نظرية الاستنباط لابد وأن تُتضمن فى البرهان ، ليست كتدريب أجوف فى أسلوب متشدد للبرهان ، ولكن كضرورة منطقية وكمعين لمساعدة الطلاب على فهم واستيعاب الأصول المنطقية للبرهان .

(٥) عكس النقيض :

تُدْرس صورة عكس النقيض فى البرهان أحياناً على أنها برهان غير مباشر ، ولايعتبر هذا صحيحاً . فعكس النقيض صورة مباشرة صالحة للبرهان الاستنباطى ، وهذه الصورة نصّها :
إذا كان نفى ك (q) يؤدى إلى نفى ق (p) فإن ق (p) تؤدى إلى ك (q) ويعبر عن ذلك بالرموز كلآتى : $\frac{\sim ك \rightarrow \sim ق}{ق \rightarrow ك}$ [$\frac{\sim q \rightarrow \sim p}{p \rightarrow q}.$]

وكل قضية (ك ← ق) $[p \rightarrow q]$ لها عكس نقيض ~ ك ← ~ ق $[\sim q \rightarrow \sim p]$
وفى كثير من الأحيان يكون من السهل إثبات صحة عكس النقيض أيسر من البرهان على صحة القضية ذاتها . وحالما تم إثبات صحة عكس النقيض فإن صلاحية عكس النقيض تقيم الدليل على صواب القضية ذاتها . فإذا أعتبرنا القضية التى تقول بإنه « إذا تطابق كل ضلعين متقابلين فى شكل رباعى فإن الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع » عكس النقيض لهذه القضية هو إذا لم يكن شكل رباعى متوازى أضلاع فإنه ليس صحيحاً أن كل ضلعين متقابلين فيه يتطابقان .

مثال :

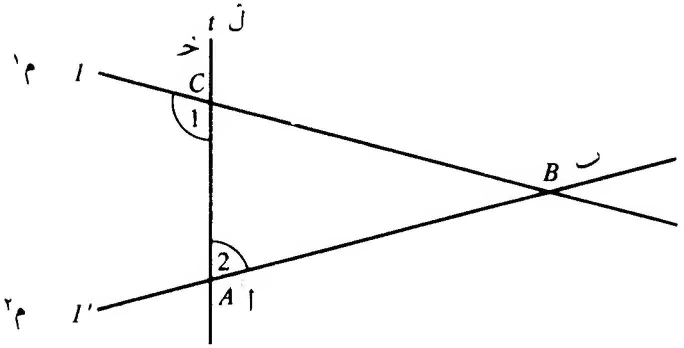
إذا قطع قاطع مستقيمين بحيث تتطابق أى زوايتين متبادلتين داخلتين كان المستقيمان متوازيين .

يمكن إثبات هذه النظرية باستراتيجيات مختلفة :
استخدام النظرية الاستنباطية .
- باستخدام البرهان غير المباشر .
- كما يمكن إثباتها باستخدام عكس النقيض .

ويصبح المطلوب إثبات صحة الآتى :

إذا لم يتواز مستقيمان (~ك) $[\sim q]$ فإنهما لايكوّنان مع أى قاطع زوايا متبادلة داخلة متطابقة .

ويمكن إثبات صيغة عكس النقيض بالنظرية الاستنباطية كما يلى :



شكل ٤ – ٢

نفرض أن المستقمين م١ ، م٢ [l and l'] غير متوازيين [~ك] [$(\sim q)$]

وينتج عن ذلك أنهما يتقاطعان [ر١] [(r_1)]

• يتكون △ اب حـ [ABC] من : تقاطع المستقمين م١ ، م٢ [l and l'] والقاطع ل [ر٢] [$t\ (r_2)$]

∡١ زاوية خارجة بالنسبة للمثلث اب حـ [ABC]

∡٢ زاوية داخلة فى نفس المثلث [ر٣] [(r_3)]

قياس ∡١ أكبر من قياس ∡٢ [ر٤] [(r_4)]

الزوايتان ∡١ ، ∡٢ زوايا متبادلة داخلة [ر٥] [(r_5)]

∴ الزوايا المتبادلة الداخلة ليست متطابقة [~ق] [$(\sim p)$]

ومن ذلك ينتج أن

(~ك ، ر١ ، ر٢ ، ر٣ ، ر٤ ، ر٥) ← ~ق [$(\sim q, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow \sim p$]

وطبقا للنظرية الاستنباطية

إذا لم يتواز مستقيمان فإنهما لايكوّنان مع أى قاطع زوايا متبادلة داخلة متطابقة . أى أن

حيث أن (~ك ، ر١ ، ر٢ ، ر٣ ، ر٤ ، ر٥) ← ~ق

[$(\sim q, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow \sim p$]

إذن (ر١ ، ر٢ ، ر٣ ، ر٤ ، ر٥) ← (~ك ← ~ق)

[$(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p).$]

وباستخدام عكس النقيض ينتج أن

إذا قطع قاطع مستقيمين بحيث تتطابق أى زوايتين داخلتين [ق] [(p)] كان المستقمان متوازيين [ك] [(q)] أى أن $\dfrac{\sim ك \rightarrow \sim ق}{ق \rightarrow ك}$ [$\dfrac{\sim q \rightarrow \sim p}{p \rightarrow q}$]

والرموز المستخدمة فى البرهان توضح منطق النظرية الاستنباطية واستراتيجية عكس النقيض ، ومع ذلك فإن تلك الرموز ليست ضرورية للبرهان ، ولا يطلب من الطلاب أن يستخدموها عند

كتابتهم البرهان . والرموز هنا مستخدمة لتوضيح استراتيجية البرهان فقط فهى مفيدة للطلاب الذين يتعلمون هذه النماذج والاستراتيجيات .

(٦) البرهان باستنفاذ جميع الحالات :

تعتبر هذه الصورة من البرهان سهلة نسبياً لمعظم الطلاب ، لأنها تبدو حدسية بالنسبة لهم – ولكن الحدس ليس برهاناً صالحاً – وهناك عدد من الأمثلة عن العلاقات فى الحساب والهندسة والمثلثات يمكن اثباتها بطريقة استنفاذ الحالات وهى طريقة صالحة فى البرهان . ويمكن صياغة هذه الصورة من البرهان كالآتى :

إذا كان كل من معطيات معينة يؤدى إلى نتيجة صواب فإن الفصل المنطقى لهذه المعطيات يؤدى إلى نفس النتيجة ، فمثلاً :

إذا كان ق١ [p_1] يؤدى إلى ك [q] ق٢ [p_2] يؤدى إلى ك [q] ، ق٣ [p_3] يؤدى إلى ك [q] فإن ق١ أو ق٢ أو ق٣ [(p_1 or p_2 or p_3)] يؤدى إلى ك [q] ويعبر عن هذه الطريقة بالرموز كالآتى :

ق١ ← ك ، ق٢ ← ك ، ... ، قن ← ك
―――――――――――――――――
(ق١ ∪ ق٢ ∪ ... ∪ قن) ← ك

$$\left[\ \frac{p_1 \to q,\ p_2 \to q,\ \cdots,\ p_n \to q}{(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \to q}\ \right]$$

حيث الرمز ∪ ["V"] يعنى أو

وتستخدم هذه الاستراتيجية فى برهان العديد من النظريات الرياضية التى تتضمن أكثر من حالة مثل براهين :

(أ) – |س ص| = |س| . |ص| ، س ص ≦ |س ص| ،

|س| – |ص| ≦ |س| + |ص|

$|xy| = |x| \cdot |y|,\ xy \leqq |xy|,$

and $|x| - |y| \leqq |x| + |y|$

وذلك لأن القيم المطلقة مثل |س| [$|x|$] تعرّف باستخدام الحالات . ★

(*) لاحظ أن ا س ا تساوى : س عندما س > صفر أو – س عندما س < صفر أو صفر عندما س = صفر

(ب) –الكثير من نظريات الهندسة التى تتضمن أكثر من وضع كما فى حالة نظرية علاقة الزاوية المحيطية بالزواية المركزية المشتركة معها فى القوس . (الحالات التى يقع فيها مركز الدائره داخل الزاوية المحيطية ، والتى يقع فيها مركز الدائرة خارجها ، والتى يقع فيها على أحد ضلعى الزاوية) .

جـ – قانون جيب التمام فى المثلثات .

(٧) االإستقراء الرياضى** :

لعل مصطلح « الاستقراء » الرياضى مصطلحاً مضللًا إذ أن أسلوب البرهان بهذه الاستراتيجية ليس استقرائياً ولكنه استنباطياً ، وهى صيغة صالحة منطقياً ، بينما الاسلوب الاستقرائى ليس برهاناً صالحاً منطقياً إذ أن الاقناع فيه يعتمد على الأمثلة فقط .

ومبدأ « الاستنباط الرياضى » لايمثل برهاناً عن طريق الاستقراء كما يبدو من المصطلح ، ولكنه يستخدم لإثبات أن القضية موضع المناقشة صادقة وصحيحة لكل مجموعة الأعداد الطبيعية* أو المجموعة جزئية لانهائية منها (مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من ٦ مثلًا أو مجموعة الأعداد الزوجية) .

ويسير البرهان على صحة قضية ما بطريقة الاستقراء الرياضى فى خطوتين :

أ – إثبات صحة القضية فى حالة ن = ١ $[n = 1]$

ب – إثبات أنه إذا كانت القضية صحيحة فى حالة ن = ر $[n = k]$ فإنها تكون صحيحة فى حالة ن = ر + ١ $[k + 1]$

ويفشل بعض التلاميذ فى إدراك صلاحية هذا الأسلوب من البرهان لأن الأمر يبدو لهم وكأن البرهان يعتمد على إثبات صحة النظرية فى حالتين فقط : عندما ن = ١ $[n = 1]$ وعندما ن = ر $[n = k]$ بحيث ر > ١ $[k > 1]$ وبعض التشبيهات بالفئات على مواقف أخرى تجعل التلاميذ المتشككين أكثر أقتناعاً فمثلًا إذا افترضنا أن هناك دَرَجاً من السلالم يحتوى على عدد لانهائى من السلالم ، ونريد أن نعرف مإذا كانت المسافات بين السلالم تمكننا من التسلق لأى ارتفاع نريده على هذا الدرج . فإذا تأكدنا أن أول سلمة قريبة من الأرض بحيث يمكن الوصول إليها ، وأنه من الممكن الوصول إلى أى سلمة أعلى من السلمة السابقة لها مباشرة فإنه يمكننا بذلك أن نفترض إمكانية التسلق لأى سلمة على هذا الدرج .

(**) يسمى هذا المبدأ فى بعض الكتب « الاستنتاج الرياضى »

(*) مجموعة الأعداد الطبيعية هى ط = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

إن البرهان بصورة الاستقراء الرياضى لمجموعة مرتبة لانهائية من الأعداد الطبيعية يعبر عنه رمزياً كلآتى :

$$\frac{\text{خا}(1)\text{ ؛ ولكل } \text{ر} \in \text{ط} \text{، خا}(\text{ر}) \rightarrow \text{خا}(\text{ر}+1)}{\text{خا}(\text{ن}) \text{ لكل ن} \in \text{ط}}$$

$$\left[\ \frac{P(1);\ \text{and for every } k \in N,\ P(k) \rightarrow P(k+1)}{P(n) \text{ for every } n \in N}\ \right]$$

وهذا يعنى أنه :

إذا كان العدد الأول فى مجموعة لانهائية ن من الأعداد الطبيعية المرتبة يمتلك الخاصية خا [P] وإذا كان صحيحاً أن توفر الخاصية خا [P] للعدد الذى رتبته ر [k] يؤدى إلى توفر الخاصية خا P فى العدد الذى رتبته (ر + ١) [$k+1$] فى المجموعة ن ، فإن كل عدد ن فى المجموعة ن يمتلك الخاصية خا P

وقد يتساءل بعض التلاميذ : ماذا يحدث لو أن العدد الذى رتبته ر [k] لايمتلك الخاصية خا [P] ؟ والحقيقة أن هذا لايهمنا والمهم هو أنه إذا افترضنا أن العدد الذى رتبته ر [k] يمتلك الخاصية خا [P] فإن ذلك يتبعه بالضرورة أن العدد التالى له ر + ١ [$(k+1)$] يمتلك هذه الخاصية ، وذلك لكل ر [k] تنتمى إلى ط [N] وهناك أمثلة عديدة للبرهان بإستخدام « الإستقراء الرياضى » .

مثال :

أثبت أن ٢^س > ١ + س^٢ [$2^x > 1 + x^2$] لكل س [x] عدد طبيعى أكبر من ٤ .من الواضح بالتعويض المباشر أن المتباينة غير صحيحة فى حالات س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ [$x=1, 2, 3, \text{ and } 4$] فى حالة س = ٥ [$x = 5$]

٢^س = ٢^٥ = ٣٢ ، ١ + س^٢ = ١ + ٢٥ = ٢٦ ، ٣٢ > ٢٦

∴ المتباينة صحيحة فى حالة س = ٥ [$x = 5$] (١)

نفرض صحة المتبانية فى حالة س = ر [$x = n$]

٢^ر > ١ + ر^٢ [$2^n > 1 + n^2$] والمطلوب إثبات أن : ٢^(ر+١) > ١ + (ر + ١)^٢ [$2^{n+1} > 1 + (n+1)^2$] بضرب طرفى المتباينة الصحيحة ٢^ر > ١ + ر^٢ [$2^n > 1 + n^2$]

فى ٢ يكون : ٢ س^ن+١^ > ٢ + ٢ س^٢^ $[2^{n+1} > 2 + 2n^2.]$

وعلينا الآن أن نثبت أن ٢ + ٢ س^٢^ > ١ + (س + ١)^٢^

ولكى يكون ٢ + ٢ س^٢^ > ١ + (س + ١)^٢^

لابد إن يكون ٢ + ٢ س^٢^ > ٢ + س^٢^ + ٢ س $\quad 2 + 2n^2 > 2 + 2n + n^2,$

> ٢ + ٢ س + س^٢^ $\quad 2 + 2n^2 > 2 + 2n + n^2$, then

ولابد أن يكون ٢ س^٢^ > ٢ س + س^٢^ $\quad 2n^2 > 2n + n^2,$

ولابد أن يكون س^٢^ > ٢ س $\quad n^2 > 2n,$

ولابد أن يكون س > ٢ $\quad n > 2.$

وهذا صحيح لأن س > ٤ فى حالتنا هذه

٢^س^ + ١ > ١ + (س + ١)^٢^ $\quad 2^{n+1} > 1 + (n+1)^2$

أى أن (٢^س^ > ١ + س^٢^) ← ٢^س+١^ > ١ + (س + ١)^٢^ (٢)

$[2^n > 1 + n^2] \rightarrow 2^{n+1} > 1 + (n+1)^2$

ومن (١) و(٢) يتضح توافر شرطى الاستقراء الرياضى

∴ ٢^س^ > ١ + س^٢^ $[2^x > 1 + x^2]$ لكل س $[x]$ عدد طبيعى أكبر من ٤ .

وعلى الرغم من أنه توجد أنواع أخرى من البرهان الاستنباطى المباشر إلا أن الاستراتيجيات السبع التى أوردناها هى أكثرها استخداماً فى برهنة النظريات والتمارين الرياضية فى المدرسة الثانوية . ولابد من الاشارة إلى أن الكثير من البراهين فى الرياضيات – إن لم يكن كلها – تتطلب استخدام توليفة من أكثر من استراتيجية من الاستراتيجيات السبع السابقة وقد عرضنا كلًا من هذه الاستراتيجيات على حدة لتوضيحها وليس الإيحاء بضرورة إستخدام كل منها مفرداً دون غيره ، وسنعرض فيما يلى نوعين آخرين من البرهان الاستنباطى برفض التناقص المباشر وهما البرهان بفكرة المثال المضاد والبرهان غير المباشر .

- البرهان بفكرة المثال المضاد :

يمكن أعتبار البرهان باستخدام فكرة المثال المضاد نوعاً من البرهان الاستنباطى المباشر . فالمثال المضاد يُستخدم لبيان أن تعميماً خاطئاً هو فى الحقيقة تعميم خطأ . ومن ناحية أخرى يمكن أعتبار

المثال المضاد برهاناً لطريقة رفض التناقض وذلك باعطاء موقف يناقض صحة تعميم خا ، وهذا يثبت خطأ التعميم نفسه . ويسير العمل فى هذه الطريقة كالآتى :

اعتبر التخمين : كل عناصر مجموعة ما سـ [S.] لها خاصية معينة خا [P] ، يوجد عنصر س [x] فى المجموعة سـ [S] لايحقق الخاصية خا [P] ، لذلك ، نستنتج أن ليس صحيحاً أن كل عناصر سـ [S] تمتلك الخاصية خا [P] وهذا يناقض التخمين .
لذلك : التخمين نفسه خاطىء

ونعبر عن ذلك بالرموز كالآتى :

التخمين : ∀ س ∈ سـ ، خا (س) ★	Conjecture: $\forall\, x \in S, P(x)$.
حالة مضادة : أ ∈ سـ ، ~ خا (أ) ★★	Negative instance: $a \in S$ and $\sim P(a)$
النتيجة : ∀ س ∈ سـ ، ~ خا (س)	Conclusion: $\forall\, x \in S, \sim P(x)$

ويتشكك بعض الطلاب فى مدى صلاحية هذا النوع من البرهان مقارناً بما يحدث فى البرهان المباشر . فهم يقولون بأنه عند إثبات صحة نظرية ما علينا أن نثبت أنها صحيحة فى جميع الأحوال ، ولكن لإثبات خطأ نظرية ما كيف يمكن أن يحدث بإثبات خطأ مثال واحد ؟

إن الفرق الأساسى بين طريقة إثبات صحة نظرية ما وطريقة إثبات خطأ نظرية أخرى يكمن فى إستخدام المسوِّر المنطقى « لكل » ، وهو مسوِّر لايكتب صراحة فى كل الأحوال ولكنه يكون مفهوماً ضمناً عند كتابة العديد من البراهين فمثلاً : اعتبر النظرية الهندسية « قياس الزاوية الخارجية فى مثلث يساوى مجموع قياش الزوايتين الداخلتين المقابلتين لها » . ولعلم الطلاب بصحة هذه النظرية لكل المثلثات ، فإنهم يتوقعون أن يكون منطوق النظرية لكل مثلث تكون الزاوية الخارجية ..... دون أن يفضل المنطوق المسوِّر « لكل » كما هو الحال فى معظم كتب الهندسة . وعلى المدرس توضيح أن منطوق النظرية يعنى أن الأمر خاص بكل المثلثات سواء ذكر ذلك صراحة أم لا ، ومن الأفضل أن يذكر ذلك صراحة دائماً .

إن المسوِّرات المنطقية لابد وأن تذكر صراحة فى النظريات والقضايا المطلوب أثبات أنها ليست صحيحة وأن يحدد أيضا المجموعة التى يتم بحث صحة أو خطأ النظرية فى إطارها .

فمثلاً : اعتبر العبارة : « عملية الجمع توزع على عملية الضرب » إذا نظرنا إلى هذه الخاصية فى إطار مجموعة الأعداد الحقيقة فإنها تكون عبارة خطأ لأن جمع الأعداد الحقيقية ليس توزيعياً بالنسبة

---

* الرمز ∀ يعنى لكل
** الرمز ~ يعنى النفى

لعملية الضرب ولكن إذا نظرنا إلى نفس الخاصية فى إطار مجموعة مجموعات فإنها تكون صواباً لأن الأتحاد (الجمع المنطقى) يوزع على التقاطع (الضرب المنطقى) فى المجموعات .

ولاشك أن مثل هذه الأمور واضحة للمعلم ، ولكنها لاتكون واضحة للطالب عندما نثبت خطأ تعميم ما عن طريق إيجاد مثال مضاد ، فإننا لانثبت بذلك خطأ كل حالة من حالات التعميم ولكننا نثبت خطأ التعميم نفسه . أى أننا نثبت أنه : « ليس صحيحاً أن كل عنصر من عناصر مجموعة س [S] تمتلك خاصية خا [P] ولكننا لانثبت أن : « كل عنصر من عناصر المجموعة س [S] لا تمتلك الخاصية خا [P] وللتوضيح : أعتبر المجموعة س = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٦} $S = \{1, 2, 4, 6\}$ ، ثم وضح صواب أو خطأ العبارات التالية فيما يتعلق بخاصية الأعداد الطبيعية الزوجية بالنسبة لها :

عبارة (١) : عناصر المجموعة س [S] أعداد زوجية .

عبارة (٢) : كل عناصر المجموعة س [S] أعداد زوجية .

عبارة (٣) : بعض عناصر المجموعة س [S] أعداد زوجية .

عبارة (٤) : « إذا انتمى عنصر للمجموعة س [S] فإنه يكون عدداً زوجياً تمثل قضية »

عبارة (٥) : القضية التى تمثلها العبارة (٤) السابقة قضية صواب .

(أ) العبارة (١) عبارة غامضة لأنها لا تتضمن مسورراً ، لذا لايمكن الحكم على صوابها أو خطئها لأنها ليست مسورة تسويراً كافياً .

(ب) العبارة (٢) خطأ لأن العدد « ١ » ينتمى إلى المجموعة س [S] ولكنه ليس زوجياً .

(ج) العبارة (٣) صواب لأن المجموعة س [S] تحتوى الأعداد الزوجية ٢ ، ٤ ، ٦

(د) العبارة (٤) صواب لأنها فعلًا تمثل قضية منطقية « إذا كان .... فإن .... »

(هـ) العبارة (٥) خطأ لأن القضية المذكورة فى العبارة (٤) تعنى أن كل عنصر فى المجموعة س [S] عدد زوجي وهذا ليس صحيحاً . والعبارة (٤) هى فى الحقيقة العبارة (٢) ، ولكنها بدون ذكر واضح وصريح للمسوّر « لكل » .

ومما سبق نود أن نشير إلى الآتى :

– هناك أهمية فى بعض الأحيان لتحديد المسوّر المنطقى المتضمن فى عبارة ما قبل البرهنة على صحة أو عدم صحة قضية ما .

- البرهان باستخدام فكرة المثال المضاد وهو برهان على عدم صحة تعميم ما ، ووجود مثال . مضاد لايعنى أن القضية خطأ لجميع الحالات التى تتضمنها ، ولكنها تعنى فقط أن التعميم ليس صحيحاً .
- ففى المنطق الرياضى تكون الفضية خطأ إذا لم تكن صواباً لكل الحالات التى تتضمنها .

• البرهان غير المباشر :

البرهان غير المباشر هو نوع من البرهان عن طريق رفض التناقض . وهذا البرهان يسبب تشويشاً لبعض الطلاب ، وذلك للأسباب التالية :

- معظم التلاميذ لايرون البرهان غير المباشر فى الرياضيات إلا عند دراستهم الهندسة النظرية ، ومن ثم فإنه لايكون قد تكون لديهم مفهومية كافية لهذا النوع من البرهان .
- يعالج كثير من المدرسين البرهان غير المباشر دون شرح للصيغة المنطقية التى يستند إليها هذا النوع من البرهان .
- يجب أن يستخدم البرهان غير المباشر فقط عندما تكون قضية إما صواب أو خطأ . فإذا ماكانت القضية غير محددة فإن الفرد قد يصل إلى تناقض بفرض أنها صواب وأيضاً بفرض أنها خطأ .

ويشعر كثير من الطلاب بعدم الارتياح عند استخدامهم للبرهان غير المباشر ، فعلى حد تعبيرهم يقولون بأن « مجرد الحصول على تناقض نتيجة الافتراض بخطأ النظرية لايعنى بالضرورة أنها صواب » .

هناك صور منطقية عديدة للبرهان غير المباشر ، ولكن الصورة الأكثر شيوعاً فى هندسة المدرسة الثانوية هى ماسنعرضه فيما يلى :

معظم القضايا فى مقرر الهندسة من نوع « إذا كان ... فإن ... » أى و ← ك [$p \rightarrow q$] فإذا أردنا أن نثبت صحة قضية و ← ك [$p \rightarrow q$] بطريقة غير مباشرة نبدأ بافتراض صواب و [p] وخطأ ك [q] أى نفترض أن كلًا من و [p] ، نفى ك [q] صواب ، ونشتق من ذلك تناقضاً بأن كلًا من ر [r] ، نفى ر [r] صواب

نعبر عن هذا بالرموز كالآتى : $\dfrac{(\text{و} ، \sim\text{ك}) \leftarrow (\text{ر} ، \sim\text{ر})}{\text{و} \leftarrow \text{ك}}$ $\left[\dfrac{(p, \sim q) \rightarrow (r, \sim r)}{p \rightarrow q} \right]$

هناك بعض القضايا والنظريات التى يصعب اثباتها بطرق مباشرة ، مما يدعو إلى إثباتها بالبرهان غير المباشر ، كذلك هناك قضايا ونظريات أخرى يمكن اثباتها بطرق مباشرة وغير مباشرة . ومن أمثلة القضايا التى يستخدم فيها البرهان غير المباشر (عدد ما مثل $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبى) ، (مجموعة الأعداد مجموعة لانهائية) ، (العدد الكاردينالى لمجموعة الأعداد الحقيقية أكبر من العدد الكاردينالى لمجموعة الأعداد النسبية)

وفى المدرسة الثانوية لايكون استخدام البرهان غير المباشر قاصراً على النظريات والقضايا الهندسية .

مثال : إثبت صحة الآتى :

إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين مساوياً الصفر فإن واحداً منهما على الأقل يساوى الصفر .

ويسير البرهان غير المباشر كالآتى :

ليكن ا ، ب [a and b] ، بعددين حقيقيين حيث اب = صفر [$ab = 0$] ونفرض أن ا $\neq$ صفر ، ب $\neq$ صفر [$a \neq 0$ and $b \neq 0$] (وهذا إفتراض بصحة نفى النتيجة المطلوب الوصول إليها)

كما إن فى مجموعة الأعداد الحقيقية تكوّن حقلًا مع عمليتى الجمع والضرب .

إذن ا [a] له معكوس ضربى وليكن $\frac{١}{ا}$ [$\frac{1}{a}$]

ولكن $\frac{١}{ا}$ (اب) = [$\frac{١}{ا}$ (ا)] (ب) = ب [$\left(\frac{1}{a}\right)(ab) = \left(\frac{1}{a}\right)(a)(b) = b$]

باستخدام خاصية التجميع ومعنى المعكوس الضربى .

وحيث أن $\frac{١}{ا}$ (اب) = $\frac{١}{ا}$ (صفر) [$\left(\frac{1}{a}\right)(ab) = \left(\frac{1}{a}\right)(0)$]

= صفر [$= 0$]

إذن ب = صفر [$b = 0$]

وهذا يناقص الفرض بأن ب $\neq$ صفر [$b \neq 0.$]

وإذن يصبح لدينا ب = صفر، ب $\neq$ [$b = 0$ and $b \neq 0$] فى نفس الوقت أى أن :

الفرض بأن اب = صفر ، ا $\neq$ صفر ، ب $\neq$ صفر [$ab = 0$ and that $a \neq 0$ and $b \neq 0$]

قادنا إلى أن ب = صفر ، ب $\neq$ صفر [$b = 0$ and $b \neq 0.$]

لذلك ، وطبقاً لمبدأ البرهان غير المباشر إذا كان اب = صفر [$ab = 0$] فإن ا = صفر أو ب = صفر [$a = 0$ or $b = 0$]

ويستخدم كل من البرهان المباشر وغير المباشر لإثبات الكثير من نظريات الرياضيات المقررة فى المدرسة الثانوية . وقد تستخدم كل من الطريقتين فى برهان نظرية واحدة . ففى المثال السابق أستخدمنا قانون الوضع وقانون الرفع والنظرية الأستباطية ضمناً فى البرهان . ومع ذلك فإنه قبل أن يستوعب الطلاب البراهين الرياضية استيعاباً ذا معنى فإنه لابدلهم وأن يفهموا كلًا من الصور المنطقية التى تستند إليها تلك البراهين . وعلى الرغم من أن بعض المعلمين يفضلون تدريس وحدة فى المنطق كموضوع منفصل فى المدرسة الثانوية إلا أن الكثير منهم يفضلون إدماج مبادىء المنطق والصيغ البرهانية وتطبيقاتها فى كل مقررات الرياضيات وموضوعاتها .

أسباب تدريس البرهان الرياضى فى المدرسة :

على الرغم من اختلاف المختصين بتربويات الرياضيات فى الرأى عن المدى الذى يتم فيه التأكيد على البرهان فى المدرسة الثانوية ، إلا أن هناك من الأسباب ما يُلزمنا بأن يكون هناك قدر معقول من البراهين النظرية (تتضمنه برهنه النظريات) فى رياضيات المرحلة الثانوية . وقد ظهرت بعض هذه الأسباب أثناء ما عرضناه من معالجات لأنواع البراهين الرياضية .

ومن المداخل التى تساعدنا فى تخمين القدر المناسب من الإهتام بالبرهان فى المدرسة الثانوية أن نحدد الأهداف المعرفية والوجدانية لتدريس البرهان النظرى ، ومن ثم تبنى معالجة البرهان على أهمية تلك الأهداف . وينبغى أن نبدأ بالتساؤل عن السبب فى إقامة الرياضيين للبرهان . بما أن دور الباحثين فى الرياضيات هو توسيع ومد المعارف الرياضية وإعادة صياغة وبناء المعارف القائمة ، فإنه لابد وأن يقام البرهان على صحة النظريات بهدف إزالة الشكوك والسماح بالاستمرار فى التوسع والكشف الرياضى بمزيد من الثقة المبنية على الأسانير والبراهين القوية . فبعد أن يتم البرهان على التخمينات يمكن للرياضين أن يستمروا فى بحثهم عن مبادىء وعلاقات وتطبيقات رياضية جديدة مع ازدياد الثقة فى صدق عباراتهم الرياضية وصلاحية وموثوقية الطرق التى يستخدموها . من المؤكد أن من أهداف تدريس البرهان هو توسيع المعارف الرياضية وإزالة الشكوك حول صحتها ، ولكن هل هذه الأهداف ذات معنى عند طلاب المرحلة الثانوية ؟ إن هذا صحيح ولكن عند القليل من الطلاب الذين يتوقعون ن يكونوا رياضيين فى المستقبل ، أو الذين ينوون الاستمرار فى دراسة الرياضيات المتقدمة بالجامعة . ومع ذلك هناك أسباب أخرى لفائده تدريس البرهان لمعظم الطلاب .

إن معظم الطلاب لديهم بعض الشك فى صدق القضايا والعلاقات الرياضية التى تتضمنها كتبهم المدرسية ، إنهم ينظرون إلى حصة الرياضيات على أنها مكان يتعلمون فيه حقائق ومهارات مفيدة – وهذا ما يجب أن يكون بالفعل – ويتوقعون تأكد معلميهم ومؤلفى الكتب وتحققهم من صدق تلك الحقائق وصحة تلك المهارات التى يقدموها للطلاب ، ولذلك فإن إزالة الشك لايمثل هدفاً بالنسبة لمعظم الطلاب ومع ذلك فإن البراهين النظرية يمكن أن تكون مثيرة وتجذب انتباه الطلاب إذا ما عولجت كلعبة منطقية ، وهذا فى حد ذاته مبرراً كافياً لدراستها بالنسبة لبعض الطلاب . وحيث أن من أهداف التعليم المدرسى تنمية التذوق للعديد من العلوم العقلية ، فإن البراهين النظرية يمكن أن

تساعد الطلاب فى أكتساب فَهْم أفضل للطرق التى يستخدمها الرياضيون ، ولطبيعة تركيب وبنية الرياضيات .

ومن ناحية أخرى فإننا نرغب أيضا أن يتكون عند طلابنا تقدير وتذوق للأساليب الاستنباطية ، وأن يقدّروا كثيراً الصيغ الاستنتاجية ويطبقوها بعد انتهائهم من المرحلة الثانوية . فالذين يعرفون كيفية استخدام الاستنتاجات المنطقية الصالحة يكونون أكثر قدرة على المشاركة فى المؤسسة الديمقراطية ، ويمكنهم تجنب الوقوع فى خداع الأستنتاجات غير الصحيحة ، كما يكونون أكثر قدرة على المعاونة فى حل بعض المشكلات الصعبة فى المجتمع الذى يعيشون فيه . وتوفر دراسة البراهين النظرية فى المرحلة الثانوية موقفاً محايداً يمكن فيه للطلاب اختيار صحة الصيغ الاستنتاجية الجديدة التى تُقدم لهم ، إلى جانب ممارسة إستخدامها وتطبيقها وتحسينها .

ويمكن أن ينتج عن دراسة البراهين النظرية اكتشاف تخمينات وطرق استنتاجية جديدة . فالكثير من الناس يشعرون بقدر كبير من الارتياح والاعتزاز عندما يقدمون أعمالاً أصيلة من ابتكارهم . ويمكن أن تكون البراهين النظرية منشطاً إبداعياً مثيراً لبعض الطلاب .

وتعتبر البراهين النظرية نوعاً هاماً من مهارات حل المشكلات ، وأحد أهداف تدريس الرياضيات هو مساعدة الطلاب فى تعلم الاستراتيجيات العامة والتى يمكن انتقالها فى حل المشكلات . وبصفة عامة فإن البراهين النظرية وليس تذكر براهين النظريات يمكن أن تيسر النماء العقلى وتساعد الطلاب على تعلم كيف يتعلمون .

والبراهين الرياضية لا تحقق صحة المبادىء والعلاقات فحسب ، ولكنها توفر شواهد جديدة تساعد الطلاب على استيعاب القوانين المنطقية وتذكر الحقائق والمفاهيم والمبادىء الرياضية وذلك عن طريق بناء علاقات بينها . ويمكن أن تساعد البراهين النظرية الطلاب فى تكوين بنيات عقلية موحدة تحتوى على شبكات من الخبرات الرياضية وعلاقات متبادلة بين تلك الخبرات . وبهذا المعنى يمكن أن تؤدى البراهين النظرية دور المنظمات البعدية لخبرات رياضية سبق دراستها ، كما يمكن أن تقوم بدور منظمات خبرة متقدمة لخبرات تعلم جديدة .

ويتفق معظم أساتذة تربويات الرياضيات عل أن تلك الأهداف الخاصة بالبراهين النظرية والتى أشرنا إليها تعد هامة بدرجة كافية تبرر تدريس البرهان وتؤيد وجوده كنشاط صالح فى رياضيات المدرسة الثانوية . ويستطيع مدرس الرياضيات بنفسه أن يقرر الوقت الذى يمكن أن يقضيه فى تدريس البراهين النظرية ، وأن يحدد درجة القوة المتطلبة فى تلك البراهين . ومع ذلك فإن أنواع البراهين التى يقوم بها الطلاب ودرجة القوة المتوقعة فى براهينهم تعتمد إلى حد كبير على مدى نموهم ونضجهم العقلى .

وذكر جورج بوليا (عام ١٩٥٧) فى الرد على تساؤلى « لماذا ندرس البرهان » : إذا فشل الطالب فى التعرف على حقيقة هندسية معينة فهو لا يفقد كثيراً ، فقد يكون استخدامه لهذه الحقائق

قليلاً فى حياته العملية ، ولكنه إذا فشل فى التعرف على البراهين الهندسية فإنه يكون بذلك قد فقد أبسط وأفضل الأمثلة لشواهد صادقة ، وفقد أفضل فرصة لاكتشاف فكرة التعليل القوى المتشدد .

تدريس الطلاب البرهنة النظرية :

يختلف تدريس البرهنة النظرية عن تدريس طرق التفكير . وحيث أن البرهان النظرى هو منشط شديد الفردية لا يمكن اتمامه باستخدام خوارزمية (طريقة إجرائية) فإنه لذلك يصبح عملية يصعب تدريسها للطلاب . وعلى الرغم من أن البرهان النظرى عمل يصعب تدريسه ويمكن أن يسبب إحباطاً فى تعلمه ، إلا أنه يجب عدم إهماله فى حصص الرياضيات ، كما أنه يجب ألا يقدم بطرق عشوائية غير هادفة .

وقبل أن نقترح بعض الاستراتيجيات المفيدة الطلاب كيفية القيام بعمل براهين يجب أن نناقش بعض الاستراتيجات الرديئة والتى يشيع استخدامها فى حصص الرياضيات وحيث أن النشاط الرئيسى فى كثير من مقررات الهندسة بالمرحلة الثانوية هو البرهنة على النظريات والتمارين ، وحيث أن مدرسى الهندسة ملزمون بتغطية كم كبير من البراهين النظرية فإن بعض المدرسين يستخدمون استراتيجيات رديئة فى محاولتهم التعجيل بتعلم البراهين .

ومن الطبيعى أن يتعلم الطلاب كيفية إقامة براهين ببطء وبطريقة غير فعالة فكثير من براهينهم تكون غير منظمة وغير متماسكة . حقيقية إن براهين علماء الرياضيات تكون أيضاً غير منظمة ومتناثرة ، ولكن ذلك يكون فى المراحل الأولى وإلى أن يدونوها فى مذكرات أو كتب أو مجلة منشورة . ويطلب بعض المدرسين من تلاميذهم أن يتبعوا قائمة من التعليمات ،عند اجراء البراهين النظرية وذلك فى محاولة من هؤلاء المعلمين لتعليم طلابهم تسجيل براهينهم بطرق منظمة فى وقت قصير ومن أمثلة تلك التعليمات :

١ – ارسم خطاً فى وسط الصفحة واكتب العبارات على يمين الصفحة والأسباب والتعليلات على الجانب الأيسر .

٢ – رقّم العبارات والأسباب . .

٣ – أكتب أولًا المعطيات وأختتم العبارات البرهانية بكلمة « وهو المطلوب إثباته » .

٤ – ينبغى أن يكون السبب (التعليل) إما مسلمة أو تعريفاً أو نظرية سابقة (أو تمرينا مشهوراً أو برهاناً سابقاً) .

وفى العادة يتبع المعلم نفسه تلك التعليمات عند برهنته لبعض النظريات أو التمارين على السبورة وذلك لتأكيد اتباع طلابه لها . وقد يستخدم المعلم استراتيجية الأسئلة كأن يقول : « ماهى الخطوة الأولى ؟ ماهو سبب تلك الخطوة ؟ ، مهى الخطوة الثانية ؟ ماسبب ذلك ؟ ... ماهى الخطوة الأخيرة ؟ ماسبب ذلك ؟ » . وغالباً ماتؤدى هذه الاستراتيجية إلى أن يستظهر الطلاب براهين

المعلم والكتاب المدرسى لمواجهة الشروط التى يتطلبها المعلم فى كتابة البراهين وحتى ينجحوا فى الامتحانات .

وقد يكون الاستظهار مفيداً فى تعلم الحقائق ولكنه استراتيجية عديمة الفائدة لتحقيق الأهداف المعرفية والوجدانية لتدريس البراهين النظرية . إن القصور الشديد الذى ينجم عن استخدام مثل تلك الاستراتيجية فى البراهين النظرية هو أن الطلاب يكوّنون فكرة خاطئة تماماً عن طبيعة البرهان الرياضى ويتعلمون القليل مما يمكن أن يطبقوه خارج حصة الهندسة .

وحتى عند عدم استخدام مثل ذلك المدخل السىء فإن الطلاب مازالوا قد يفشلون فى فهم أشكال الاستنتاجات المنطقية المستخدمة فى البراهين . وإنه لأمر حسن أن نعلّم التسعه أنماط من البراهين الاستنباطية المباشرة وغير المباشرة (التى ذكرناها آنفاً) فى نفس الوقت الذى يدرس فيه مقرر الهندسة . وعند تطبيق كل نمط برهانى لأول مرة يجب أن يناقش شكل البرهان المستخدم ويوضح حتى يفهم الطلاب على الأقل التعليل المستخدم فى تلك الصيغة البرهانية ، حتى إذا لم يكونوا قد وافقوا بعد على أنها صيغة صالحة للبرهان . والتقبل التامّ لبعض الصيغ البرهانية قد يتأتى فى وقت لاحق بعد أن تكون الصيغة قد أستخدمت فى عدد من البراهين . ومن الطبيعى أن تستخدم تلك الصيغ المنطقية كأساس للاستنتاجات فى البراهين ولاتكتب بالتحديد كأسباب لصلاحية البرهان فى كل مرة يتم أستخدامها خلال القيام بالبرهنة .

وحيث أن القليل من براهين النظريات الرياضية تكتب فى صورة مخطط عام ، فيجب أن يُسمَح للطلاب بكتابة البراهين نثرياً فى شكل فقرات مثل تلك التى استخدمناها عند البرهنة على النظرية التى تنص على أنه إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين يساوى صفر فإن واحداً على الأقل من العددين يساوى الصفر . وإذا أراد بعض الطلاب أن يكتبوا براهينهم فى صورة مخطط عام فإنه ينبغى السماح لهم بذلك ، ولكن هذه الصيغة يجب ألا تكون شيئاً لابد من كتابته فى كل مرة يستخدم فيها البرهان .

من المعلوم أن الرياضيين لايعطون براهين متقنة التنظيم فى محاولاتهم الأولى ، ومن الطبيعى ألا نتوقع من الطلاب ، أن يكونوا أفضل من الرياضيين المحترفين . وعندما يكتب الطالب برهانا بطريقة غير متقنة ولكنها صالحة منطقياً أو يقدم أستنتاجاً شفوياً صالحاً ولكن صياغته غير جيدة فإنه من الممكن قبول ذلك على أنه برهان جيد . وحيث أن أحد أهداف التربية بصفة عامة هو تنمية مهارات الاتصال ، فيجب تشجيع الطلاب على إعادة كتابة براهينهم - رغم صلاحيتها المنطقية - بأسلوب أكثر تنظيماً ودقة بحيث يكون مفهوماً لمن يقرأ من الطلاب الآخرين . وينبغى تشجيع الطلاب أولًا على صياغة البراهين بصورة صالحة وصائبة من الناحية المنطقية وأن يثابوا على نجاحهم فى تحقيق هذه الخطوات الأساسية . ويكون المنْشَط التالى لذلك فى عملية البرهنة هو أن تعاد الصياغة بأسلوب أفضل بحيث يسهل عملية ايصاله للآخرين فى شكل متقن .

وعلى عكس مايعتقد بعض المدرسين ، فإن أفضل الطرق لبرهنة نظرية (أو تمرين) ليس من الضرورى أن تبدأ بالمعطيات وتستمر تجاه النتيجة المطلوبة . فبعد أن يتم البرهان يُعاد تنظيم الخطوات بهذه الطريقة ، ومع ذلك فعند التفكير فى طريقة البرهان فإن الفكر قد يذهب فى اتجاهات عديدة مختلفة ، فهناك فرق بين البرهان وتسجيل البرهان على الورق ، فكل منهما يتطلب أنشطة عقلية مختلفة . فالبرهان فى حد ذاته هو نشاط عقلى لحل مشكلة ، أما تسجيل البرهان فهو صورة من صور الإتصال . فالعملية الأولى (أى البرهان) يمكن أن تكون غير منظمة وغير مرتبة من الناحية التركيبية ، ولكن العملية الثانية (أى تسجيل البرهان) تتطلب تنظيماً وترتيباً وتركيباً وشرحاً لمعاونة القارىء فيفهم البرهان . وحيث أن البرهان يتطلب التعليل لصدق مايجىء به ، فإن الفرد يضع نفسه دائماً أن النظرية أو التمرين الذى يجرى برهانه هو فى الحقيقة قضية صادقة قبل محاولة البرهنة عليه ويمكن عمل هذا عادة بإنشاء أمثلة تمثل حالات خاصة للبرهان أو بمحاولة إيجاد أمثلة مضادة . وبعد إيجاد أمثلة عديدة للقضية والفشل فى إيجاد أى مثال مضاد فإن الفرد الذى يحاول البرهنة على هذه القضية سوف يكون قد أكتسب على الأقل فهماً حدسياً لهذه القضية .

وعملية البحث عن أمثلة وأمثلة مضادة قد تشير إلى استراتيجية للبرهان ، وقد يجد الفرد أثناء وضعه أمثلة خاصة للقضية أن كل الأمثلة هى فى الحقيقة حالات خاصة لبرهانها لأنها جميعاً لها خواص مشتركة معينة يمكن تعميمها فى استراتيجية للبرهان . وقد تشير عملية البحث عن أمثلة مضادة إلى السبب فى أن القضية لايمكن أن تكون خاطئة ، وقد يقودنا أيضاً إلى استراتيجية للبرهان . وفى أى حالة فإن المحاولة لإيجاد أمثلة وأمثلة مضادة سوف تساعد الطالب على فهم بعض تضمينات هذه القضية التى يمكن أن تكون مفيدة فى برهنتها .

ولا يوجد مدخل يمكن اعتباره أفضل مدخل للبرهان النظرى ، ففى بعض الأحيان يكون من الأفضل أن نبدأ بالمعطيات ، وفى حالات أخرى يكون من المناسب أن نبدأ بتحليل المطلوب ، وفى حالات أخرى يمكن أن يكون مفيداً أن نبدأ ببعض العلاقات الوسيطة . والمعتاد ، يكون من المفيد أن نسجل جانباً التعاريف والمسلمات والنظريات والنتائج السابقة التى تبدو أنها متصلة بالمعطيات أو المطلوب بالإضافة إلى التضمينات والنتائج التى تؤدى إليها . مثل هذه الملاحظات يمكن أن توحى باستراتيجية لعمل البرهان .

وحيث أنه لاتوجد خوارزمية معينة للبراهين النظرية فإنه لايمكن للمعلمين أن يدّرسوا ما يمكن تسميته بالطريقة الوحيدة لعمل برهان نظرى ، ومع ذلك فإنه يمكنهم أن يوضحوا لطلابهم مداخل معينة استخدامها آخرون لبرهنة نظريات معينة ويتم تعلم مهارات البرهنة النظرية من خلال المران والتدريب ويمكن للمعلمين أن ينظموا لطلابهم المراحل الأولى فى هذا المران التدريبى . ويستخدم « ويكل جرن » Wickelgren (١٩٧٤) فى كتابة « كيف تحل المشكلات » استراتيجية تركيبية منظمة لتعليم قرائه كيفية قيامهم ببراهينْ لنظريات معينة ، فهو يبدأ بصياغة النظرية ويقترح صورة من الاستنتاج المنطقى التى يمكن للقارىء أن يستخدمها فى برهنة النظرية ، ثم يقول « توقف عن القراءة

وحاول أن تبرهن هذه النظرية » وإذا كان القارىء غير قادر على برهنة النظرية ويستمر فى القراءة فإنه يجد فكرة ارشادية عن نوع الاستراتيجية التى تستخدم ويُطلب منه أن يتوقف عن القراءة ويحاول البرهنة بنفسه مرة ثانية . فإذا ماظل القارىء غير ناجح فى البرهنة بنفسه فإنه يُعطى معلومات اضافية مثل نظرية أخرى أو نتيجة تفيدة فى البرهنة ويطلب منه أن يتوقف عن القراءة وإعادة المحاولة ، ويمكن أن يستمر هذا الإجراء إلى أن يفهم القارىء برهان النظرية .

ولايقترح « ويكل جرن » هذا الإجراء كإستراتيجية للبرهان ولكن بدلًا من ذلك فإنه يقترحها كإستراتيجية تدريسية لمعاونة الطلاب فى تعلم كيفية إنشاء البراهين النظرية حيث يندمج القارىء فى برهنة النظرية ولايكون مجرد فرد يحاول فهم خطوات برهان قام به فرد آخر ، ومع ذلك فإن القارىء يُعطَى معاونة كافية لضمان أنه سوف ينتهى بالوصول إلى برهان .

ويمكن للمعلمين أن يستخدموا استراتيجية « ويكل جرن » داخل الفصل عندما يتعلم طلابهم اجراءائهم الخاصة لعمل براهين نظرية ، وهذه الاستراتيجية يمكن أن تمنع الطلاب من الشعور بالفشل لأنهم يكملون كل برهان من خلال معاونات مختلفة يقدمها المعلم . ويوضح المثال التالى هذه الاستراتيجية وكيفية استخدامها فى حصص الرياضيات :

المعلـــــم : أثبت أن الخطين المستقيمين يتقاطعان فى نقطة واحدة على الأكثر . هذه النظرية يمكن أن تبرهن باستخدام الصورة غير المباشر للبرهان (يبدأ كل طالب فى عمل برهان ، وبعد بضع دقائق نجد أن طالباً ماقد أصيب بإحباط)

الطـــالب : « لست قادراً على أن أبدأ »

المعلـــم : « من الجائز أنك ترى فى أن تبدأ بمعلومية أن أى نقطتين مختلفتين تعنيان مستقيماً واحداً وواحداً فقط »(بعد بضع دقائق غير قادر على البدء فى البرهان)

الطـــالب : « مازلت غير قادر على البرهان »

المعلـــم : « هل يمكن أن تبدأ بفرض وجود مستقيمن متقاطعين فى نقطتين على الأقل ؟ »

الطـــالب « كلا ، سأحاول ذلك (مازال الطالب غير ناجح فى محاولته) »

الطـــالب : لاأستطيع البرهنة »

المعلـــم : « هل تعلم أنه إذا تقاطع مستقيمان فى نقطتين مختلفتين ا ، ب [**A and B**] ؟ فإنه يوجد خطان مستقيمان مختلفان يمران بالنقطتين ا ، ب [**A and B**] ؟

الطـــالب : نعم ولكن ماذا يعنى ذلك »

المعلـــم : ألا يناقض هذا المسلمة التى تنص على أن النقطتين المختلفتين تحددان مستقيماً واحداً وواحداً فقط »

الطـــالب : « نعم إنها تناقضها ، ولكن كيف يمكن أن تكوّن نقطتان مستقيمان مختلفين ؟ »

المعلــــــــم : « إن هذا غير ممكن وهذا يعنى أننا قد وصلنا إلى تناقض »
الطـــــالب : « حاول أن تتبين بقية البرهان بنفسك »
الطـــــالب : « أعتقد أن هذا التناقض يعنى أن النظرية المطلوب البرهنة عليها صحيحة لأنه إذا لم تكن صحيحة فإننا نحصل على شيء غير معقول »
المعلــــــــم : « هذا صواب ، وهذا هو البرهان غير المباشر ، لكى نبرهن نظرية بهذه الطريقة يجب أن نفترض أن المعطيات صحيحة وأن نفترض أن النتيجة المطلوبة خطأ ، أى أنك تفترض عكس النتيجة المطلوبة ، ثم حاول أن تجد تناقضاً ، وهذا التناقض يعنى أن المعطيات وعكس المطلوب غير متفقين . وطبقاً لما يقوله منطق البرهان غير المباشر فإن النظرية الأصلية يجب أن تكون صحيحة .
الطـــــالب : « أعتقد أننى بدأت أفهم »
المعلــــــــم : « حسناً ، حاول الآن أن تكتب البرهان بطريقة يمكن أن يفهمها الآخرون »

ومن الواضح أن هذه الطريقة أفضل من طريقة عرض البرهان على السبورة وعندما يستخدم المدرس أسلوب « حاول بنفسك وبمساعدتى » فإن الطلاب يجب أن يكون لهم دور نشط فى البرهان فلا يكونون مجرد مستمعين فقط يلاحظون مايعرضة المعلم على السبورة .

وبغض النظر عن الأساليب التى تُستخدَم فى تدريس الطلاب طرق البرهنة فإن تعلم كيفية البرهان يتطلب مراناً جاداً لعدة سنوات ، وبالتالى فإنه ينبغى تدريس البرهان النظرى من خلال استراتيجية حلزونية . يجب أن يمارس الطلاب براهين بسيطة فى الحساب باستخدام صيغ بسيطة للبرهان المنطقى مثل صيغة قانون الوضع والصيغة الانتقالية . ويمكن ممارسة البرهان فى الجبر باستخدام البرهان باستنفاذ جميع الحالات الممكنة وصيغة الاستقراء الرياضى ، ويمكن فى الهندسة استخدام صيغ البرهان الأكثر تعقيداً مثل صيغ عكس النقيض وقانون الرفع ونظرية الاستنباط والبرهان غير المباشر ولعل أفضل نصيحة يمكن تقديمها للمعلمين عن كيفية تدريس البراهين النظرية « كن صبوراً » . إن البرهنة النظرية نشاط عقلى ليس بسيطاً وعلى مستوى عال يتطلب استخدام الكثير من الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء والقوانين الرياضية إلى جانب الاهتمام بالعلاقات المتبادلة بين كل هذه الصيغ وبين الخبرات الرياضية .

نموذج تعليم وتعلم حل المشكلات

إن أكثر السمات المميزة للإنسان عن سائر المخلوقات هو أنه فريد فى قدرته على حل المشكلات . ويمكن أن تعود نسبة كبيرة من تقدم البشرية إلى هذه القدرة المتفردة للإنسان على حل المشكلات وحل المشكلات لايمثل فقط نشاطاً حرجاً فى تقدم الأنسان أو حتى فى استمرارية الحياة ذاتها ، بل هو أيضاً نشاط فى غاية الإثارة إن الكثير من أنشطة وقت الفراغ مثل الألعاب والمباريات والأحاجى والمسابقات هى فى واقع الأمر اختبارات ممتعة للقدرة على حل المشكلات

وتتضح أهمية حل المشكلات فى الرياضيات وما تحمله من متعة عقلية لكثير من الناس من خلال تاريخ الرياضيات وتاريخ تعليم الرياضيات . فمشكلة تثليث الزواية (استخدام أدوات هندسية معينة فى تقسيم أى زواية إلى ثلاث أجزاء متساوية فى القياس) ومحاولات تربيع الدائرة (رسم مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معلومة قادت إلى إكتشاف الأعداد المتساوية مثل (ط، هـ) والمحاولات العديدة لبرهنة مسلمة التوازى فى هندسة أقليدس المئوية أثّرت فى ظهور هندسة جديدة هامة ، والفشل فى إيجاد قانون عام لحل معادلات الدرجة الخامسة أدى إلى تطورات هامة فى نظرية الزمر★ . وحتى فى زماننا هذا فإن مجلات رياضية كثيرة تنشر الكثير من الألعاب والأحاجى (الألغاز) والمشكلات الرياضية (مثل مجلة : The Mathematics Teacher, Mathematical Monthly الأمريكية) وتتضح متعة حل المشكلات فى الرياضيات أيضا فى ذلك العدد الكبير من طلاب المدارس الثانوية والجامعات الذين يشاركون فى مسابقات حل المشكلات الرياضية محلياً واقليمياً ودولياً .

وقد أصبحت كتب جورج بوليا Polya التى أصدرها عن الاستراتيجيات العامة لحل المشكلات ولحل المشكلات الرياضية (١٩٥٧ – ١٩٦٢ – ١٩٦٥) من أمّهات الكتب الحديثة . وقد أستخدمت كتب ومقالات أخرى كثيرة أفكار بوليا وتوسعت فيها ، فعلى سبيل المثال تم معالجة موضوع حل المشكلات فى هذا الفصل بناء على أفكار بوليا .

وحيث أن أحد الأنواع الرئيسية فى حل المشكلات الرياضية هو البرهنه على صحة النظريات والتمارين ، فإن الكثير مما ذكرنا عن البرهان فى البند السابق مرتبط بالإستراتيجيات الأكثر عمومية فى حل المشكلات .

ماهو حل المشكلات

قبل أن نتعرض للأهداف التربوية لحل المشكلات فى حصص الرياضيات ، واستراتيجيات تعلم وتعليم كيفية حل المشكلات ، وإعطاء بعض الأمثلة لحل المشكلات الرياضية ، يلزم أن نُعرّف حل المشكلات بصفة عامة ، كما نُعرّف حل المشكلات فى الرياضيات . إن الخطوة فى تعريف حل المشكلات هو الإجابة عن السؤال « مالمقصود بحل المشكلات » .

من الغريب أن نجد أن دراسة خصائص المشكلات لايساعد كثيراً فى تعريف مصطلح « مشكلة » إن تعريف « المشكلة » يكمن فى إتجاهات الناس نحو المواقف التى قد تكون أو لاتكون مشكلة بالنسبة لهم فمثلًا قد يكون السؤال « أوجد العدد الذى يحول الجملة المفتوحة ٣ س (   ) + ٧ = – ٥ [$3x \square + 7 = -5$] إلى عبارة صواب » مشكلة بالنسبة لكثير من تلاميذ الصف السادس أو السابع ولكنه لا يمثل مشكلة لمعظم تلاميذ المرحلة الثانوية . إن إيجاد قانون عام لحل معادلات الدرجة الثانية لم يعد مشكلة لأى رياضى ، ولكنه يمثل مشكلة لمعظم المبتدئين فى دراسة

(★) أنظر مقال الانسان والزمرة للدكتور وليم عبيد بمجلة الرياضيات المصرية ، العدد الثالث عام ١٩٨٤

الجبر . إن وجود موقف يحتاج إلى المعالجة شرط لازم لوجود مشكلة (قد يكون الموقف سؤالًا أو قضية جدلية) ، ولكن الحكم على موقف معين بأنه يمثل أو لا يمثل مشكلة يعتمد على نظرة الشخص المواجه بالموقف . فالكتابه باليد اليمنى (أو اليسرى) قد لا تمثل مشكلة لشخص بينما مشكلة لشخص آخر .

والأمثلة السابقة تشير إلى عدة خصائص للمشكلة : (١) يجب أن يكون الشخص على وعى بموقف ما لكى يعتبره مشكلة بالنسبة له . (٢) يجب أن يعترف الشخص أن الموقف يتطلب فعلًا . (٣) يشعر الشخص بأنه يحتاج إلى أو يرغب فى القيام بعمل ما تجاه هذا الموقف بل ينبغى له أن يقوم بإجراء ما (٤) ينبغى ألا يكون حل الموقف واضحاً أو ممكناً بطريق مباشر بالنسبة للشخص الذى يعمل على إيجاد حل لهذا الموقف .

وكمثال لموقف يمكن أن يكون مشكلًا افترض أن طالباً يذاكر فى غرفتة ثم انقطعت الكهرباء فجأة من الغرفة . تحت أى الشروط يمكن أن يمثل هذا الموقف مشكلة لهذا الطلب ؟

شرط (١) : الوقت نهاراً وليست هناك مصابيح مضاءة أو أجهزة كهربائية تعمل بالغرفة (الطالب لايشعر بالموقف ، ومن ثم فهو لا يمثل مشكلة بالنسبة له)

شــرط (٢) : الراديو يتوقف ويحاول الطالب إضاءة مصباح ولكنه لا يضىء . الوقت نهاراً ، الطالب يقرر أنه لابد وأن يكون تيار الكهرباء قد انقطع عن الغرفة ، ويستمر فى مذاكرته (لا يدرك الطالب أن الموقف يتطلب أى فعل يقوم به ومن ثم فهو لا يمثل مشكلة بالنسة له)

شــرط (٣) : الوقت ليلًا ، ينظر الطالب خارج الغرفة ، ويرى أن الضوء موجود فى الغرف الأخرى ، ولكنه يذهب إلى فراشة لينام . (الطالب يعترف بأنه لابد من القيام بفعل معين ، ولكنه لايحتاج بل ولايرغب فى ذلك . ومن ثم فإن الموقف لايمثل مشكلة بالنسبة له)

شــرط (٤) : الوقت نهاراً ، الراديو يتوقف ، الطالب يرغب فى الإستماع للراديو أثناء مذاكرته (الطالب على وعى بالموقف ويعرف أنه يتطلب فعلًا ، ويرغب فى أتخاذ إجراء معين على الرغم من أنه لايحتاج إليه ، ومن ثم فإن هذا الموقف قد يمثل مشكلة بالنسبة له) .

شــرط (٥) : المكان مظلم . لم ينته الطالب بعد من مذاكرته . وهناك ضرورة ملحة لذلك حتى ينجح فى الامتحان . (الطالب على وعى بالموقف ويعرف أنه يتطلب فعلًا ، ويحتاج إلى القيام بإجراء معين على الرغم من أنه لايرغب فى ذلك ، ومن ثم فإن الموقف قد يمثل مشكلة بالنسبة له)

شــرط (٦) : المكان مظلم ، الطالب يحتاج ويرغب فى استمرار مذاكرته ، لذلك فهو يذهب إلى صندوق مفاتيح الكهرباء (كما تعود أن يفعل فى مثل هذه الحالات) ويتبت

التوصيلات فيضيء المصباح . (على الرغم من أن الطالب هنا كان على وعى بالموقف ويعترف بأنه يتطلب فعلاً ، ويرغب فى ويحتاج إلى القيام بإجراء معين وقام بهذا الاجْراء إلا أن الموقف هنا لايمثل مشكلة بالنسبة له ، لأن الموقف كان واضحاً وحاضراً عنده)

شـرط (٧) : المكان مظلم والطالب يحتاج إلى ويرغب فى الاستمرار فى المذاكرة ، إنه يذهب لتثبيت التوصيلات بصندوق المفاتيح ولكن المصباح يظل مظلماً ويرسل فىَ طلب كهربائى ولكنه لايجده ، بعد بضع دقائق يدير مفتاح الراديو المتصل بالكهرباء فيعمل الراديو ، وفجأة بشىء من الاستبصار يقوم بتغيير المصباح فيضيء المصباح الجديد وتحل المشكلة (تتكامل فى هذا الموقف كل عناصر المشكلة ومن ثم فالموقف هنا يمثل مشكلة بالنسبة لهذا الطالب ، ومع ذلك إذا تكرر نفس الموقف لنفس الطالب فهو يعرف كيف يحله ، ومن ثم فإذا تكرر نفس الموقف لايصبح مشكلة لنفس الطالب)

وقصارى القول فإن الموقف يمثل مشكلة لشخص ماإذا كان على وعى بوجود هذا الموقف ويعترف بأنه يتطلب فعلًا ما ، ويرغب فى أو يحتاج إلى القيام باجراء ما ويقوم به ولايكون الحل جاهزاً فى جعبته .

الآن يتضح أن حل المشكلة بصفة عامة يعرف على أنه حل موقف يُنظر إليه على أنه مشكلة من وجهة نظر الشخص الذى يقوم بحل الموقف . ويعرف حل المشكلة الرياضية بأنه موقف فى الرياضيات ينظر إليه الشخص الذى يقوم بالحل على أنه مشكلة .

وإذا ماالتزمنا بهذا التعريف فإن التمارين الموجودة فى كتب الرياضيات يجب أن تُسمَى جميعها تدريبات مشكلات ، والتدريب يعتبر أو لايعتبر مشكلة حسب نظرة الطالب الذى يقوم بمحاولة حله ، كما يتوقف على الطريقة التى يسلكها للقيام بالحل . وكثير من التمارين فى كتب الرياضيات المدرسية عبارة عن تدريبات وتمارين روتينية وذلك على الرغم من أن بعض التمارين الأكثر صعوبة تمثل المشكلات حقيقية لمعظم الطلاب . وليس مهماً أن نطلق كلمة مشكلات على التدريبات والتمارين أو أن نسمى إجراءات حلها مهارات حل المشكلات . ولكن المهم أن الطلاب والمعلمين يعرفون الفرق بين تعلّم المهارات الرياضية عن طريق حل التمارين والتدريبات وبين تعلّم المداخل العامة لحل المشكلات عن طريق حل مواقف لها الخصائص التى تُستخدَم فى تعريف المشكلات الحقيقية ، كما تختلف أهداف التعلم التى تتحقق من خلال مهارات التدريبات وتلك التى تتحقق من خلال حل مشكلات حقيقية .

ويجوز للمعلمين والطلاب أن يطلقوا على كل أنواع التمارين الرياضية مصطلح مشكلات ، ومع ذلك فإن تمارين التدريب والممارسة تكون مناسبة لتعليم الحقائق والمهارات ولكن المشكلات الحقيقية تكون مناسبة لتعلّم استراتيجيات الاكتشاف والاستقصاء ، كما تكون مناسبة لعمل اكتشافات أصيلة

وتعلّم كيفية التعلم . وفيما تبقى من هذا البند سوف تَستخدَم كلمة « مشكلة » « وحل المشكلة » بالمعنى الضيق الذى عرفناها به آنفاً .

لماذا حل المشكلات فى الرياضيات المدرسية ؟

يُعدّ حل المشكلات مُنْشط هام ومناسب فى الرياضيات المدرسية ، لأن أهداف التعلم التى يحققها حل المشكلات ، وتعلّم إجراءات حل المشكلة بصفة عامة تمثل أهدافاً هامة وجوهرية للمجتمع . وتشير نتائج البحوث أن الاستراتيجيات العامة لحل المشكلات التى يتم تعلمها فى حصص الرياضيات يمكن فى حالات معينة أن ينتقل أثرها وتطبق فى مواقف مشكلة أخرى . أما المبادىء التى يتم تعلمها وتطبيقها فى حصص حل المشكلات فتكون أكثر إنتقالًا وأثراً للمواقف خارج الفصل عن غيرها من المبادىء التى لاتطبق فى حل المشكلات .

ويمكن لحل المشكلات الرياضية أن يساعد الطلاب فى تحسين قدراتهم التحليلية وتساعدهم فى استخدام هذه القدرات فى مواقف مختلفة ، كما يساعد حل المشكلات أيضاً الطلاب فى تعلّم الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية وذلك عن طريق توضيح تطبيقات الخبرات الرياضية والعلاقات المتبادلة بينها . وحيث أن حل المشكلات نشاط ممتع لمعظم الطلاب فإنه يساعد على تحسين دافعية الطلاب مما يجعل مادة أكثر إثارة ومتعة للطلاب . ومع ذلك فإن حل المشكلات يمكن أن ينقص الدافعية إذا ما تحول الهدف إلى مجرد تحقيق السرعة والدقة والاهتمام بالشكل والصياغة وإيجاد الحل الصحيح . وحل المشكلات عمل صعب يمكن أن يسبب أحباطا للطلاب إذا لم يتحل المعلمون بالصبر والتفهم وتقديم المساعدة المناسبة . وعندما يعرض المعلمون حل المشكلات فى بيئة تعليمية مشجعة تتسم بالراحة النفسية وعدم التوتر فإن الطلاب يمكنهم الشعور بالراحة الناجحة عن التوصل إلى حلول ابتكارية ومبدعة وأصيلة للمشكلات الرياضية التى يقدمون عليها .

ويعتبر حل المشكلات عملية أساسية فى الرياضيات . وتكوّن جزءًا هاماً من عمل الرياضيين . ومن ثمّ فإنه يمكن أن يتعلم الطلاب بصورة أفضل عن طبيعة الرياضيات وأنشطة الرياضيين إذا ماقاموا بحل مشكلات رياضية ، وحيث أن نقل التراث الثقافى هدف هام للنظم التعليمية فإن كلًا من الخبرات (الحقائق – المهارات – المفاهيم – المبادىء) والطرق الرياضية (استراتيجيات حل المشكلات) والتى هى جزء هام من التراث يجب أن تنقل إلى طلاب المدارس الثانوية .

استراتيجيات تعليم وتعلّم حل المشكلات الرياضية :

فيما يلى خمس خطوات لنموذج عام لحل المشكلات ، والنموذج يُبرز الاستراتيجيات الأكثر تحديداً لحل المشكلات وبرهنة النظريات فى الرياضيات :

خطوة (١) : عرض المشكلة فى صورة عامة .

خطوة (٢) : إعادة صياغة المشكلة فى صورة إجرائية قابلة للحل .

خطوة (٣) : صياغة فروض وإجراءات بديلة لمواجهة المشكلة .

خطوة (٤) :اختبار الفروض وتنفيذ الاجراءات للحصول على حل أو مجموعة من الحلول الممكنة .

خطوة (٥) : تحليل وتقويم الحلول واستراتيجياتها ، والطرق التى قادت إلى اكتشاف تلك الاستراتيجيات .

شرح نموذج حل المشكلات :

الخطوة (١) : هى الفعل الذى عن طريقة يتم اكتشاف المشكلة أو يصبح على وعى بوجودها فمثلًا : (١)^{٣} = (١)^{٢} ، (١)^{٣} + (٢)^{٣} = (٣)^{٢} ، (١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} = (٦)^{٢} ، (١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + (٤)^{٣} = (١٠)^{٢} .

هذه الحالات الخاصة توحى بامكانية وجود قانون عام يربط بين مكعبات الأعداد ومربعاتها ، ولكن ماهو ؟

الخطوة (٢) : تتضمن البدء فى المشكلة بتحديد أفضل ، حتى تكون هناك فرصة لإيجاد طريقة لحلها ، فإذا مااستمر الأخذ بالأمثلة الخاصة السابقة فهل يكون الافتراض بأن (١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + ... + (ن)^{٣} = (١ + ٢ + ٣ + ... + ن)^{٢} [$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$] صحيحاً ؟ .

الخطوة (٣) : تتضمن محاولة إيجاد مداخل لحل المشكلة ، فمن الممكن أن يكون البرهان على صحة العلاقة (١)^{٣} + (٢)^{٣} + (٣)^{٣} + ... + (ن)^{٣} = (١ + ٢ + ٣ + ... + ن)^{٢} [$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2$] بالتمثيل الهندسى كما يمكن أن يكون الاستقراء الرياضى مفيداً فى البرهان على صحتها ، كما قد يكون البرهان غير المباشر مفيداً أيضاً .

الخطوة (٤) : هى فعلًا حل المشكلة ، أو اختبار صحة الفروض أو التخمينات التى أفترضت لحل المشكلة ، ففى هذه الخطوة يتم تجريب المداخل المقترحة للحل ، فإذا لم تصلح جميعها فإنه يجب البحث عن طرق أخرى .

الخطوة (٥) : تُحلل الحلول لتحديد معقوليتها ، وربما أكثرها دقة وصحة ، وينبغى تحليل استراتيجيات الحل والطرق التى أُستخدِمت فى أكتشاف تلك الاستراتيجيات أى أنه ينبغى أن نحاول اكتشاف استراتيجيات لحل المشكلة تكون قابلة للتعميم . وعلى الرغم من أهمية التحقيق من صحة مشكلة ما ، إلا أن الأهم هو أن نحلل ونقوّم الطرق العامة لحل المشكلات لتحديد مدى فعاليتها وما إذا كان من الممكن تحسينها ، وكيفية إمكان تطبيقها فى حا مجموعات كاملة من المشكلات . فإذا

استخدمت الاستقراء الرياضى فاسأل نفسك عما دعاك للتفكير فى إستخدام هذه الطريقة وهكذا .

ونناقش فيما يلى طرق إتمام كل خطوة من الخطوات الخمس ثم نقترح استراتيجيات لتدريس تلك الأساليب للطلاب .

طرق استخدام نموذج حل المشكلات :

الخطوة (١) : وهذه الخطوة من النموذج تقدم المشكلة فى شكل عام عبارة عن نشاط يتضمن استبصار وأكتشاف . فبالنسبة للرياضيين يكون الأعتراف بوجود مشكلات وعمل تخمينات أمور لها نفس أهمية حل المشكلات إن لم تكن أكثر أهمية ، وحتى فى مجالات غير الرياضيات يكون اكتشاف مشكلات وتوقع وجود مشكلات أنشطة هامة ومثيبة . وعبر تاريخ العلم كان على العلماء رجالًا ونساءً أن يضعوا الأسئلة الصحيحة المناسبة قبل أن يجدوا الحلول ، ومن أمثلة ذلك الأسئلة التالية والتى قادت إلى حلول لمشكلات هامة فى العلوم والرياضيات : هل تدور الشمس حول الأرض ؟ هل يمكن ألا تكون الأرض مستوية ؟ ماالذى يسبب الملاريا ؟ هل يمكن الوقاية من شلل الأطفال ؟ كيف تطير الطيور ؟ ماأسباب المد والجذر ؟ إن قادة الدول ومديرى الأعمال ورؤساء المؤسسات وباحثى الطب ورجال الاجتماع وعلماء التربية .... الخ يجب أيضاً أن يسألوا الأسئلة الصحيحة قبل أن يمكنهم فهم وحل مشكلاتهم ومن أمثلة ذلك : ماأسباب الحروب ؟ لماذا يشترى الناس كماليات غير أساسية ؟ كيف يمكن التحكم فى التلوث دون فقدان الانتاج ؟ ما أسباب السرطان ؟ ماأسباب الجريمة ؟

إن أسئلة مثل تلك تؤدى إلى أن يتساءل المرء كيف نتمم الخطوة (١) من نموذج حل المشكلات ، بمعنى كيف يمكن إيجاد المشكلات العامة بصفة خاصة بالنسبة للرياضيين ومدرسى الرياضيات وطلابها كيف تُكتشف المشكلات الرياضية ؟ وكما أوضحنا سابقاً فإن النشاط الأساسى فى إيجاد مشكلات هو وضع أسئلة ، ولكن أى نوع من الأسئلة يمكن أن يؤدى إلى أكتشاف مشكلات فى الرياضيات ؟

١ – أحد طرق أكتشاف المشكلات هو البحث عن أنماط . فالأنماط الموجودة فى معاملات مفكوك (أ + ب)^ن حيث ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... $\left[(a + b)^n \text{ for } n = 1, 2, 3, \cdots \right]$ تقود إلى اكتشاف نظرية ذات الحدين .

٢ – يمكن أن تكتشف المشكلات من خلال البحث عن علاقات . فالعلاقات بين أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية ومساحته حت أو بنظرية فيثاغورث .

٣ – أبحث عن تناظرات ، بمعنى محاولة اكتشاف تشابهات بين الكيانات الرياضية المختلفة . فالتناظرات التى قد اكتشفت بين عناصر النظم الرياضية المختلفة قادت إلى اكتشافات هامة فى نظريات الزمر والحلقات والحقول .

٤ – حاول أن تجد تغيرات فى المشكلات التى تم حلها . فبعد أثبات أن قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر يمكن للمرء أن ينظر إلى معكوس النظرية أى إذا نصف قطرا شكل رباعى كلًا منهما الآخر فهل يكون الشكل متوازى أضلاع ؟

٥ – حاول أن تكوّن تعميمات . إذا كانت المسافة بين نقطتين فى المستوى (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) [(x_1, y_1) and (x_2, y_2)] فى المستوى تساوى $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$ [$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$] فماذا يمكن أن تكون المسافة بين نقطتين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد ؟

٦ – أنظر إلى خواص عامة فى المشكلات المختلفة . بعض عناصر الحلقات لايكون لها معكوسات ضربيه . الحلقات لها معكوسات للعنصر الصفرى . أى أنه يوجد عناصر أ ، ب [a and b] فى الحلقات بحيث أن أب = صفر حيث أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر [$ab = 0$ but $a \neq 0$ and $b \neq 0$.] هل يمكن أن يكون هذان الموقفان متكافئين ؟

وبصفة عامة فإن أفضل الطرق لإيجاد مشكلات هو التأمل والتخمين ، كن محباً للإستطلاع ، ضع اسئلة ، أعصف ذهنياً ، دع عقلك يتجول هنا وهناك ، فكرّ تباعدياً . ومن الطبيعى أن يؤدى التأمل إلى اكتشاف تخمينات خاطئة أكثر من فروض صائبة ، ولكن هذا شيء طبيعى . إن مجموعة الفروض الخاطئة أوسع بكثير من مجموعات الفروض الصائبة ، أو هل هى كذلك ؟ هذه العبارة هى مجرد تخمين . هل هى صواب ؟ هل يمكن أثباتها ؟ هل يمكن أثبات عدم صحتها ؟

الخطوة (٢) : وهى إعادة صياغة المشكلة اجرائياً لجعلها قابلة للحل وهى أيضاً عمل صعب . وقد قيل أن أية مشكلة مصاغة جيداً يمكن حلها ، أو أن المشكلة التى لايمكن حلها تكون صياغتها غير صحيحة . إن إحدى المشكلات الصعبة – ولكنها أسهل فى الحل من اكتشاف أسباب السرطان – هى تحديد ما إذا كان التدخين وتلوث الهواء يمكن أن يسببا السرطان . إن مشكلة كشف اسباب الحروب يمكن أن تعاد صياغتها على أنها مشكلة لتحديد العلاقة بين الحروب والاعتبارات الاقتصادية . « لماذا يشترى الناس الحاجيات غير الأساسية » ؟ يمكن إعادة صياغتها كالآتى : « هل يزداد احتمال أن يستجيب الناس لإعلان تجارى إذا ماتكرر عدة مرات ؟ إن إعادة صياغة مشكلة عامة بأسلوب أكثر تحديداً يمكن فى كثير من الأحيان أن يختزل عدد استراتيجيات الحل الممكنة من عدد لانهائى إلى عدد محدود . إن وضع وإجابة مجموعة الأسئلة التالية يمكن أن يساعد فى تشكيل إعادة الصياغة التى تجعل المشكلة قابلة للحل والتى تكون مصاغة صياغة عامة ولتوضيح كيفية استخدام كل من تلك الأسئلة فى إعادة صياغة مشكلة ما ، فاننا سنقدّم المشكلة العامة التالية باستخدام كل سؤال :

متى يكون المثلثان هما نفس المثلث ؟

١ – هل للمشكلة معنى ؟ من المعقول أن نفكر فى معنى « نفس المثلث »

٢ – هل المشكلة جديرة بالتفكير ؟ أو هل هى مثيرة ؟ هذه المشكلة تبدو جديرة بالتفكير لأن الأشكال المثلثية موجودة فى المعمار ولها تطبيقات عديدة فى علوم المهندسين . والحكم بأن المشكلة مثيرة أو غير مثيرة يتوقف على الشخص الذى يتصدى لها ، ومع ذلك فإن الاشكال المثلثية مثيرة لبعض الناس .

٣ – هل أفهم المشكلة ؟ إن صياغة المشكلة بهذه الصورة غامضة بعض الشيء ولكننى أعرف تعريف « المثلث » ، ومع ذلك فلست متأكداً من أننى أفهم معنى « نفس المثلث » فى هذا السؤال .

٤ – ماذا تعنى المشكلة ؟ هذه المشكلة تعنى أنه ينبغى أن نحاول تحديد أى خواص المثلث يمكن استخدامها لنتصور ما إذا كن المثلثان هما نفس المثلث .

٥ – هل المشكلة شديدة العمومية ؟ فى هذا المثال المشكلة مصاغة صياغة عامة جداً .

٦ – ما المعلوم ؟ إننا نعلم تعريف « المثلث » .

(٧) ما المجهول ؟ نحن لا نعرف معنى « نفس المثلث » .

٨ – هل توجد معلومات كافية فى هذه الصياغة للمشكلة ؟ الإجابة بالنفى ، حيث مشكلة المثلث هنا مصاغة صياغة غامضة .

٩ – هل يمكن صياغة المشكلة بطريقة أوضح معنى ؟ نعم ، نحن نحتاج إلى صياغة المشكلة بحيث يتضح معنى « نفس المثلث »

١٠ – هل يمكن تجزىء المشكلة إلى مشكلات جزئية ؟ وهنا يمكن أن يكون هناك تعاريف صحيحة كثيرة لـ « نفس المثلث » لذلك يمكن أن توجد مشكلات جزئية عديدة .

أن التفكير الواعى فى تلك الأسئلة العشر يمكن أن يؤدى إلى إعادة صياغة تلك المشكلة العامة فى المشكلات الجزئية التالية :

١ – تحت أى شروط يكون للمثلثين نفس الشكل ؟ وبتعبير آخر : متى يكون المثلثان متشابهين ؟

٢ – تحت أى شروط يكون للمثلثين نفس المساحة ؟ وبتعبير آخر : أوجد قانون مساحة المثلث ثم أستخدمة فى تعريف « لهما نفس المساحة »

٣ – تحت أى شروط يكون للمثلثين نفس الشكل ونفس المساحة ؟ وبتعبير آخر : ماشروط تطابق مثلثين ؟

ومع أنه مازال من الضرورى تعريف : « تشابه » « مساحة » ، « تطابق » فى المثلثات ، إلا أنه أصبح لدينا الآن مجموعة من المشكلات أكثر تحديداً وتبدو قابلة للحل . إن الصياغة الجديدة للمشكلة الغامضة والتى كانت تتصف بالعمومية أصبحت محددة تحديداً كافياً لإقتراح فروض واستراتيجيات وطرق الحل .

فى مناقشة **الخطوة (٣)** ، وهى الخاصة بوضع فروض وتكوين خطوات لمواجهة المشكلات ، سوف نستخدم المشكلة الجزئية الأولى الخاصة بتحديد شروط تشابه مثلثين لتوضيح الاستراتيجيات الخاصة بتنفيذ هذه الخطوة .

١ – ما المعطيات ؟ ونعنى بذلك ماالمعلوم ؟ دعنا نفترض أننا نعرف تعريف المثلث وتعريف تشابه مثلثين . نحن نعلم أن المثلثين يتشابهان إذا تساوت قياسات الثلاث زوايا المتناظرة فى المثلث (أو إذا تطابقت الزوايا) .

٢ – ما المطلوب ؟ حيث أننا مهتمون بإيجاد شروط تشابه مثلثين يجب أن نبحث عن علاقات بين أطوال وزوايا المثلثين المتشابهين .

٣ – ما الأنشطة التى يمكن أن تقود إلى معلومات جديدة ؟ فى هذه الحالة يمكن أن ننشىء عدداً من المثلثات المتشابهة مختلفة المساحات ، ونقيس أطوال أضلاعها وزواياها فى محاولة لاكتشاف العلاقات .

٤ – والتخمينات التى تبدو معقولة ؟ بناء على مشاهداتنا لعدد من المثلثات المتشابهة يمكننا أن نخمن الفروض التالية : تكون المثلثات متشابهة إذا تساوت أطوال أضلاعها المتناظرة (أو تطابقت الأضلاع) . تتشابه المثلثات إذا كانت أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة . يتشابه مثلثات إذا ساوى قياسا زاويتين من أحدهما قياس زاويتين مناظرتين فى المثلث الآخر . تتشابه المثلثات إذا تساوت مساحاتها .

٥ – ماالإجراءات التى يمكن أن تُستخدم للبرهنة على صحة أو عدم صحة التخمينات ؟ هنا يمكن استخدام طرق البرهنة الاستنباطية السابق الاشارة إليها للبرهنة على صحة أو عدم صحة هذه التخمينات .

الخطوة (٤) :وهى الخاصة باختبار الفروض وتنفيذ الإجراءات للحصول على حلول للمشكلات . وهذه الخطوة تمدنا بالحل الفعلى لكل مشكلة يجرى حلها . ولايوجد خوارزمية (طريقة) أو مجموعة خوارزميات تستخدم فى حل المشكلات . وفى الحقيقة ، فإنه فى ضوء تعريفنا لحل المشكلات إذا اكتشفت خوارزمية عامة لحل المشكلات فإنه لن توجد مشكلات لأن الحل لأى مشكلة كامنة يصبح واضحاً وحاضراً عن طريق استخدام هذه الخوارزمية .

ولحسن الحظ ، يوجد لدى المعلمين والطلاب – كما هو الحال عند الرياضيين – عدد من الطرق العامة التى يمكن أن تستخدم لإعطاء بعض الإرشادات لعملية حل المشكلات ، وفيما يلى أمثلة لمثل هذه الإرشادات وكل منها موضح من خلال استخدامها لحل التخمين « يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما » .

١ – تأكد أنك تعرف التعريف الصحيح لكل مفهوم مستخدم فى منطوق المشكلة . مامعنى « مثلث » ومامعنى « تشابه » ؟ ومامعنى « تناسب » ؟

٢ – تأكد من أنك تفهم المشكلة . هل يمكن صياغة هذا الفرض بدقة أكثر بحيث أنه لايوجد

إمكانية فى أن يختلط الأمر فى التعرف على أى أزواج الأضلاع التى تكون أضلاعها متناسبة .

٣ – ضع فى الأعتبار ماإذا كان قد سبق لك حل مشكلة مرتبطة بهذه المشكلة هل سبق لك أن برهنت على نظرية أخرى عن الأضلاع المتناسبة (فى الطول) لأشكال متشابهة ؟

٤ – من الممكن أن يكون حل المشكلة لحالة خاصة مؤشرا لإجراء يستخدم فى حل المشكلة الأكثر عمومية . هل من الممكن أن تمدنا البرهنة على النظرية فى حالة المثلثات القائمة بأية أفكار جديدة ؟

٥ – فكرّ فى طريقة البرهان الصحيحة التى تكون مناسبة ومفيدة فى حل المشكلة . هل البرهان المباشر أو غير المباشر هى الطريقة التى يمكن إستخدامها فى هذه الحالة ؟

٦ – قد يكون من الأيسر حل مشكلة أكثر عمومية ، تتضمن المشكلة موضع الدراسة كحالة خاصة ، هل هناك نظرية عامة عن الأشكال المتشابهة يمكن تطبيقها هنا ؟

٧ – تأكد أنك لم تغفل بعض المعلومات المعطاه التى قد تكون مفيدة فى حل المشكلة هل هناك أية فروض غير واردة فى منطوق القضية المعروضة للحل لم توضع فى الاعتبار ؟

٨ – حاول أن تخمن الحل (هذا الأسلوب يكون أكثر فائدة فى حل الأحاجى (الأفكار) المنطقية والمسائل الكلامية فى الجبر من استخدامه فى برهنة النظريات)

٩ – ابحث عن تضمينات مباشرة فى المعطيات يمكن أن تضيف معلومات مفيدة فى الحل ، هل يتضمن منطوق النظرية أيه علاقات يمكن أن تغير فى البرهنة على صحتها ؟

١٠ – حاول أن تبدأ من الوسط ، ثم تحرك فى الجهتين (نحو المعطيات ونحو المطلوب) ، أو إبدأ بالحل المرغوب وتحرك فى إتجاه المعطيات . هل يمكنك أن تبدأ بالمطلوب وأن تتحرك نحو منطوق النظرية ؟

١١ – حاول أن تجزىء المشكلة إلى جزئيات مترابطة ، ثم حل كل جزئية منفصلة ، هل يمكن تجزىء هذه النظرية إلى نظريات متعددة ؟

١٢ – حاول أن تحول المشكلة إلى تسلسل مرتب من المشكلات الأسهل ، هل يمكن أثبات هذه النظرية باستخدام متتابعة من النظريات التمهيدية ؟

١٣ – أعتبر إستخدام أساليب وطرق مستخدمة فى مجال دراسى آخر لحل المشكلة ، هل يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام أساليب جبرية ؟

١٤ – حاول أن تتعرف على مصادر إضافية من المعلومات التى يمكن أن تكون مفيدة فى حل المشكلة ، هل راجعت النظريات الأخرى التى سبق لك برهنتها والخاصة بالمثلثات ؟

١٥ – إذا كانت المشكلة هى برهنة نظرية ، حاول أن ترسم شكلًا مساعداً أو أن تستخدم انشاءات (عمل) إضافية ، هل رسمت شكلًا ؟ هل توصيل قطع مستقيمة إضافية يفيد فى الحل ؟

١٦ – حاول إعادة صياغة المشكلة . هل يمكنك صياغة هذه النظرية بطريقة أوضح ؟ .

١٧ – انظر إلى النتائج التى يمكنك اشتقاقها من المعطيات رغم أنها قد لاتبدو مرتبطة بالحل الذى تبحث عنه . ماالخواص الأخرى التى يمكن استنتاجها من المثلثات المتشابهة ؟

١٨ – حاول أن تضيف شروطاً إضافية للمشكلة التى يمكن أن تجعلها مقيدة أكثر ، ولكن قد تجعلها أسهل فى الحل ، هل إضافة فروض أخرى يمكن أن تفيد بشىء هنا ؟

١٩ – حاول أن تستبعد بعض الشروط من المشكلة ، ماذا يحدث إذا إستبعدت جزءً من الفروض المعطاة ؟

٢٠ – أتخذ الطريق المضاد (العكسى) وحاول أن تتبين أن المشكلة فى هذه الحالة لن يكون لها حل . قد تكون النظرية خاطئة .

٢١ – إذا لم تكن المقترحات العشرون السابقة مفيدة ، حاول شرح المشكلة لشخص آخر ، فإن شرح مشكلة لشخص آخر قد يوضحها فى ذهنك أحياناً ، وقد تصل فى وسط الطريق إلى فكرة واضحة فى طريق الحل .

٢٢ – إذا لم يكن كل ماسبق مفيداً ، أترك المشكلة بعض الوقت وأشغل نفسك بشىء آخر ، إن عقلك الباطن (ماقبل الواعى) قد يكون مشغولاً بحل المشكلة وفجأة قد تلمع فكرة الحل فى ذهنك . وإن لم يحدث شىء آخر ، فستكون لك بداية جديدة مع المشكلة .

٢٣ – احترس من أن يتكون لديك موقف عقلى متجمد فى استراتيجية واحدة لاتريد أن تحيد عنها فى محاولتك للحل . حاول أن تعود إلى استراتيجيات أخرى حتى تقودك إلى الحل ، وهنا لاتنبذ استراتيجية ما بسرعة وتحلّى بالصبر والإصرار .

يمكن لتلك القائمة من الاقتراحات أن تستمر إلى ماشاء الله ومع ذلك فإن القائمة تشتمل على عدد كاف من الأنشطة بحيث لايأتى طالب يحاول حل مشكلة ثم يقول مستعجلاً « لا أستطيع الحل ، لابد أن اسلّم بالفشل » ويمكن للقارىء أن يجد المزيد من الأفكار عن حل المشكلات فى كتب جورج بوليا (١٩٥٧ ، ١٩٦٢ ، ١٩٦٥) وفى كتاب ويكل جرن (١٩٧٤) .

الخطوة (٥) : فى نموذج حل المشكلات تتضمن تحليل وتقويم الحل أو الحلول البديلة للمشكلة ، كما تتضمن تقويم الاستراتيجيات التى استخدمت فى حل المشكلة . وفيما يلى قائمة من الأسئلة يمكن أن تساعد فى تقويم حلول المشكلات والاستراتيجيات التى تستخدم فى الحلول :

(١) هل الحل صحيح ؟
(٢) كيف تأكدت من صحة النتيجة ؟
(٣) إذا كانت هناك حلول بديلة ، فهل يوجد واحد منها أكثر مناسبة من الأخرى ؟
(٤) هل مازالت هناك طرق أخرى لحل المشكلة ؟
(٥) هل أستخدمت طريقة صحيحة منطقياً فى الحل ؟
(٦) أى الطرق الاستنتاجية أستخدمت بالتحديد ؟
(٧) هل استخدمت طريقة غير معتاده من الممكن أن تفيد فى حل مشكلات أخرى ؟
(٨) هل يمكنك استخدام الاستراتيجية التى أستخدمتها فى حل مشكلات أخرى من نفس النوع ؟
(٩) هل يمكنك استخدام نفس الاستراتيجية لحل مشكلات غير مرتبطة بهذه المشكلة ؟

(١٠) ماذا تعلمت عن حل المشكلات بصفة عامة نتيجة حلك لهذه المشكلة بالذات ؟
(١١) ما الصعوبات الخاصة التى واجهتك فى حل هذه المشكلة ؟ وكيف يمكنك تفادى هذه الصعوبات عند حل مشكلات أخرى مستقبلًا ؟
(١٢) هل جربت استراتيجيات أخرى واثبتتّ فشلها فى الوصول للحل ؟ لماذا كانت هذه الاستراتيجيات قليلة الفائدة ؟

إن القوائم الخمس السابقة ، واحدة لكل من الخطوات الخمس لنموذج حل المشكلات بصفة عامة – تمدنا بمجموعة من الأساليب يمكن لطالب المرحلة الثانوية أن يستخدمها كمعين فى حل المشكلات عند دراستهم للرياضيات وفى تعلمهم لاستراتيجيات أفضل لحل المشكلات . وعند حل مشكلات معينة ، تبدو القوائم الخمس طويلة جداً لأن كثيراً من المشكلات يمكن حله باستخدام مجموعات جزئية من الـ ٥٦ أسلوباً المقترحة هنا ومن ناحية أخرى فإن تلك القوائم ليست طويلة بدرجة كافية إذ أن الكثير من الناس سيجدون أنهم غير قادرين على حل بعض المشكلات حتى مع استخدام كل هذه الاساليب الـ ٥٦ . وبالرغم من أن هذه الأساليب صُمِمت للمساعدة فى حل مشكلات رياضية إلا أن معظمها يمكن استخدامه فى حل مشكلات فى مواد تعليمية أخرى ، بل فى حل مشكلات غير مدرسية .

استراتيجيات لتعليم حل المشكلات :

حيث أن أفضل الطرق لحل المشكلات هو أن يوجه الناس لأنفسهم أسئلة ، فإن إحدى الطرق الجيدة لتدريس أساليب حل المشكلات للطلاب هو أن نعلمهم كيف يسألون أنفسهم أسئلة خاصة بالحل . إن توفير مجموعة من الأسئلة للطلاب وجعلهم يسألون أنفسهم هذه الأسئلة عند محاولتهم حل مشكلة هى خطوة أولى جيدة نحو تعليمهم حل المشكلات ، ويظل هناك الكثير ليتعلموه ، إذ يحتاج الطلاب أن يُوضَح لهم كيفية استخدام هذه الاسئلة ، الأمر الذى يمكن أن يتم بثلاث طرق : (١) يجب أن يعرض المعلمون طرق حل المشكلات للطلاب ، وهم يسألون أنفسهم بصوت عالٍ أثناء أداء عملية الحل . (٢) يجب أن يقود المعلمون حصصاً لمجموعات من الطلاب يتم فيها حل مشكلات رياضية مع الفصل كله ، حيث يسأل كل من المعلم والطلاب أسئلة ويقدمون اقتراحات تساعدهم فى حل المشكلة موضع الدراسة . (٣) عندما يواجه الطالب صعوبة أثناء حل مشكلة ، فعلى المعلم أن يساعد الطالب فى صياغة أسئلة يسألها لنفسه لتساعده فى الحل وذلك بدلًا من أن يقوم المعلم باقتراح طريقة للحل أو إعطاء الطالب خوارزمية محددة لحل تلك المشكلة .

هذا المدخل غير المباشر لمساعدة الطلاب فى أكتشاف طرقهم الشخصية لحل كل مشكلة قد يبدو أقل فعالية عن مدهم مباشرة بمجموعة دقيقة من الخطوات التى يقومون بتنفيذها . إلا أنه – بمرور الوقت – سيتضح أنها أكثر كثيراً فى فعاليتها لأنها سوف تعلم الطلاب مداخل عامة لحل مجموعات كاملة من المشكلات . وبعد أن يكون الطلاب قد كونوا خوارزمياتهم الخاصة بهم لحل نمط معين من المشكلات ، يصبح من المناسب جداً أن نسمح لهم بكتابة خوارزمياتهم فى صورة قوائم من الخطوات

وأن يستخدموها لحل مشكلات أخرى من نفس النوع . وحقيقه الأمر أن هذا يمثل هدفاً رئيسياً لحل المشكلات .بمعنى أنه ينبغى للطلاب أن يبحثوا عن استراتيجيات يمكن تطبيقها فى حل مجموعات كاملة من المشكلات . ومع ذلك ، فإنه إذا أعد المدرسون قوائم بخطوات حل المشكلات دون مشاركة الطلاب فإن الطلاب قد يتعلمون مهارة حل أنماط معينة من المشكلات ولكنهم لايتعلمون كثيراً عن حل المشكلات بصفة عامة . ولايعنى هذا أنه ينبغى على الطلاب أن يكتشفوا كل مهارة أو عملية رياضية بأنفسهم . وعندما يكون هدف التعلم هو فهم وتطبيق المهارات الرياضية فإنه يمكن عرض هذه المهارات للطلاب دون أن توضع فى شكل مشكلات أو مواقف حل مشكلات . ومع ذلك فإنه عندما يكون الهدف هو فهم وتطبيق المبادىء والعلاقات وتعلم أساليب حل المشكلات بصفة عامة فإنه يجب معاونة الطلاب فى إيجاد طرقهم الشخصية لحل المشكلات .

ولتوضيح كيف يمكن لمعلم الرياضيات أن يقود عن طريق المشاركة درساً فى حل المشكلات لفصل كامل من الطلاب ، سنعرض أستراتيجية لمساعدة الطلاب عن حل مشكلة إيجاد قانون طول قطر متوازى المستطيلات والطريقة المستخدمة فى تدريس التلاميذ كيفية حل هذه المشكلة هى نموذج حل المشكلات ذى الخطوات الخمس والذى يتضمن إلقاء بعض الأسئلة .

الخطوة (١) عرض المشكلة فى صورة عامة :

المعلـــــم : « فى نهاية الأسبوع الماضى كنت أقوم بعمل بعض الانشاءات وواجهتنى مشكلة رياضية مثيرة ، فقد كان علّى أن أجد طول قطر جسم على شكل متوازى مستطيلات »

ملاحظـــــة : (على الرغم من أن هذه المشكلة لم يكتشفها أحد الطلاب ، إلا أن صياغة الموقف الذى ترد فيه مشكلة رياضية توضح للطلاب أحد مصادر المشكلات الرياضية)

الخطوة (٢) إعادة صياغة المشكلة فى صورة إجرائية :

المعلـــــم : « ما البعد بين ركنين (حرفين) متقابلين لمتوازى سطوح أوجهه مستطيلة ؟ »

ملاحظـــــة : (بعد أن يلقى المعلم هذا السؤال تبدو نظرات ملغزة على أوجه الطلاب وتمر دقيقة من الصمت)

طالب : « لا أعرف ماذا تعنى ياسيدى »

طالب آخر : « وأنا أيضا لا أفهم »

المعلـــــم : « هل هناك من يفهم سؤالى »

ملاحظـــــة : « يشير الفصل كله على أنه لاأحد يفهم المشكلة »

المعلـــــم : « يُهيأ لى أننى لم أُصغ سؤالى جيداً ماهو الجزء غير المفهوم.؟ »

طالب : ماذا تعنى بمتوازى سطوح أوجهه مستطيلة ؟ »

المعلــــــم : متوازى السطوح ذو الأوجه المستطيلة عبارة عن مجسم أوجهه على شكل مستطيلات . إنه متوازى مستطيلات .

طالب : « ماهذا ؟ »

المعلــــــم : « إنه شكل يشبه الصندوق (صندوق الأحذية مثلًا) »

ملاحظــــــة : (يبدو أن الطلاب بدأوا يفهمون معنى متوازى مستطيلات)

طالب : « الصناديق انها كثير من الأركان ، أى الأركان تريد أن توجد البعد بينها ؟ »

المعلــــــم : « أريد إيجاد بعد قطرى فى الفراغ مثلًا ، البعد بين الركن على اليسار الأعلى من الوجه الأمامى وبين الركن على اليمين الأسفل من الوجه الخلفى للصندوق »

طالب : « مازلت لاأرى ذلك »

المعلــــــم : « ماذا أفعل لكى أساعدك ؟ »

طالب : « لماذا لاترسم صندوقاً »

طالب آخر : كلا ، خذ صندوقاً وأرنا ماتقول »

ملاحظــــــة : (يتناول المعلم صندوقاً مفتوحاً ويستخدم مسطرة فى تمثيل أحد أقطار الصندوق)

المعلــــــم : « هل يمكن لأحدكم صياغة سؤالى بطريقة أوضح »

ملاحظــــــة : (بعد مناقشة قصيرة ، يعيد الفصل صياغة المشكلة كالآتى : أوجد المسافة القطرية بين ركن علوى على الوجه الأمامى لمتوازى مستطيلات وبين الركن المقابل له فى أسفل الوجه الخلفى)

المعلــــــم : والآن ، هل هذه الصياغة مفهومة للجميع ؟ »

ملاحظــــــة : يشير جميع الطلاب إلى أنهم يفهمون المشكلة

طالب : ومافائدة هذه المشكلة ؟

المعلــــــم : « هل يرى أحدكم تطبيقاً لهذه المشكلة ؟ »

ملاحظــــــة : (يقترح العديد من الطلاب بعض التطبيقات)

الخطوة (٣) صياغة فروض وإجزاءات بديلة لحل المشكلة :

المعلــــــم : « مشكلتنا الآن هى أن نحدد طريقة لايجاد طول القطر الداخلى لمجسم على شكل متوازى مستطيلات مثل شكل الصندوق . هل لدى أحدكم أية فكرة عن الحل ؟

ملاحظــــــة : (تمر دقيقة أو دقيقتان . ينبغى على المعلم أن يعطى بعض الوقت لطلابه للتفكير فى الأجابة عن الأسئلة)

طالب : « لماذا لانأخذ عصا مدرجة (شريطاً صلباً مدرجاً) ونقيس هذه المسافة ؟ »

المعلــــــم : هل هذا الحل حل عام بالدرجة الكافية ؟ »

طالب : « كلا ، لأنه كيف يتسنى لنا قياس قطر هذه الغرفة بعصا طولها متر واحداً ؟ »

طالب آخر : وأين سنخزن هذه العصا »

طالب : أعتقد أننا نخزنها على قطر الغرفة وحينئذ ستكون فى متناول أيدينا »

طالب آخر : « ولماذا لانستخدم شريطاً مدرجاً »

طالب آخر : لأن الشريط سوف يرتخى »

طالب آخر : « يمكن أن نثبت طرفه فى مسمار فى أحد ركنى القطر ، ثم نثبت طرفه الآخر فى الركن الآخر المقابل بعد شده ثم نقيس طوله بعصا مدرجة طولها متر »

المعلـم : « هذه فكرة طيبة ، ولكن هل يمكن لأى منكم أن يفكر فى طريقة أخرى ؟ »

طالب : « أوافق على فكرة الشريط ، ولكن هل هذه الطريقة التى يستخدمها المهندسون ؟ »

المعلـم : « اشك فى ذلك لأننى لم أشاهد أبداً تصميماً هندسياً لبناء مصحوباً بمذكرة تخبر المنفذين بأن يمدوا شريطاً لإيجاد طول دعامة قطرية » .

طالب : « إذن نحن فى حاجة إلى قانون »

المعلـم : « هذه فكرة جيدة أخرى ، دعنا نحاول تنفيذها ، هل أى منكم لديه فكرة أخرى ؟ »

ملاحظـة : « لم يقدم الطلاب أفكاراً أخرى »

المعلـم : « دعنا نلخص الطرق التى ذُكرت ، ثم نسجل نقط القوة والضعف لكل منها . »

ملاحظـة : (يرد الطلاب ثلاث طرق : استخدام عصا مدرجة طولها متر ، استخدام شريط مدرج ، إيجاد قانون – ثم تُناقش سلبيات وإيجابيات كل طريقة) .

المعلـم : « دعنا نحاول إيجاد قانون . ماالذى يجب أن تعرفه عن هذه الغرفة لكى تتمكن من إيجاد طول أحد أقطارها الداخلية ؟ »

طالب : « لابد لنا من معرفة طول الغرفة وعرضها وأرتفاعها »

المعلـم : « هل يسهل إيجاد هذه الأبعاد »

طالب : « بكل تأكيد ، نستطيع أن نستخدم عصا مدرجة طو لها متر . »

الخطوة (٤) اختبار الفروض وتنفيذ الاجراءات لحل المشكلة :

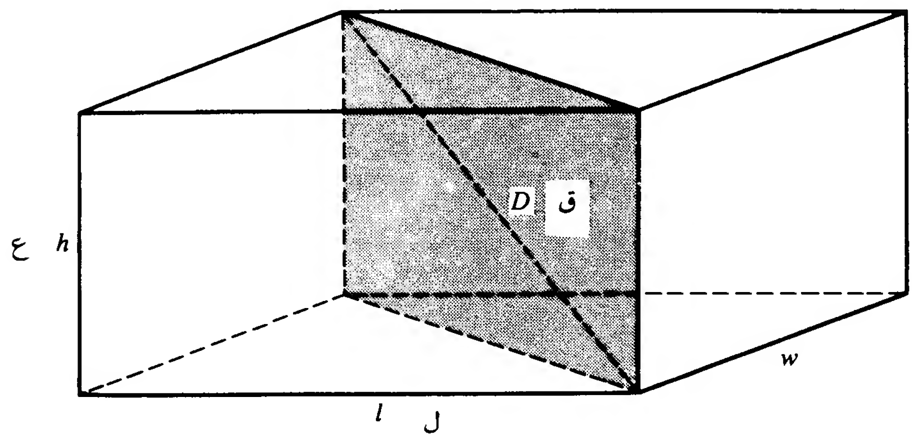
المعلـم : « افترض أن ل [l] طول الغرفة ، س [w] عرضها ، ع [h] ارتفاعها ، هل يمكن لأى منكم أن يقترح طريقة لإيجاد قانون طول القطر ؟

ملاحظـة : « تمر دقيقتان من الصمت »

المعلـم : ألم يسبق لأحدكم إيجاد طول قطر لأى شكل ؟

طالب : قطر كره هو القطعة المستقيمة التى تمر بمركزها وتصل بين نقطتين على سطحها » .

المعلـــــــم : « حسناً ، هل ترون كيف يمكن استخدام هذه الحقيقة هنا ؟ »
نفس الطالب : « أعتقد أنه يمكننا أن نضع الصندوق فى كرة »
ملاحظـــــة : « يقرر الفصل أن هذه الفكرة أصعب من المشكلة الأصلية »
المعلـــــــم : أية اقتراحات أخرى ؟ »
طالب : لقد أوجدنا أطوال أقطار لأشكال مستوية »
المعلـــــــم : أعطنى مثالًا »
نفس الطالب : « المربعات ، المثلثات ، أشباه المنحرف . »
طالب آخـر : « ماهو قطر المثلث »
المعلـــــــم : « ربما قصد زميلك المستقيمات المتوسطة أو منصفات الزوايا فى المثلثات عندما ذكر هذا الأقتراح ، أليس كذلك ياهذا ؟ »
ملاحظـــــة : (يتحقق الطالب صاحب الاقتراح من أنه كان يقصد بالفعل ماقاله المعلم) .
طالب : « إن أوجه الغرفة عبارة عن مستطيلات ، ونعرف كيف نوجد طول قطر مستطيل .
طالب آخـر : « نعم ، نستخدم نظرية فيثاغورث . »
المعلـــــــم : « هل هذا سيفيد فى حل مشكلتنا ؟ »
ملاحظـــــة : « بعد مناقشة لبضع دقائق يقرر الفصل أن الأمر يحتاج إلى رسم شكل توضيحى ثم يصلون إلى رسم الشكل المبين لمتوازى مستطيلات يمثل الغرفة ويتضح فيه قطر الغرفة . وبعد عشر دقائق من المناقشات والعمل مع بعض أسئلة للمعلم يصل الطلاب إلى إيجاد القانون : ق = √(ل٢ + ض٢ + ع٢)
[$D = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}$] حيث ق [D] تمثل طول القطر المطلوب .



شكل (٤ ــ ٣)

ملاحظـــــة : (عند حل هذه المشكلة قسَّم الطلاب هذه المشكلة إلى متتابعة من مشكلتين جزئيتين : (١) استخدموا طول وعرض الغرفة لإيجاد طول قطر الأرضية . (٢) استخدموا ارتفاع الغرفة وقطر أرضيتها لإيجاد طول قطر الغرفة الداخلى)

ملاحظـــــة : « قد يكون من المفيد لبعض الطلاب أن يحسبوا طول قطر متوازى مستطيلات معين ، مثلاً يكون فيه ل = ١٢م ، س = ٨م ، ع = ٤م [such as, l = 12 meters, w = 8 meters, and h = 4 meters] قبل أن يحاولوا إيجاد القانون العام . فالمثال فى الحالة الخاصة يمكن أن ييسر عملية التعميم) .

الخطوة (٥) التحقق من صحة الحل وتحليل استراتيجيته :

المعلـــــم : الآن ، وقد حصلنا على القانون : ق = √ل٢ + س٢ + ع٢ $\left[D = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}\right]$ كيف تعلم أنه صحيح ؟

طالب : « لنجرب القانون »

المعلـــــم : « كيف تعرف أن الأجابة التى نحصل عليها من تطبيق القانون تكون صحيحة ؟ »

طالب : « يمكن قياس القطر والمقارنة بين النتيجتين »

المعلـــــم : « حسناً ، دعنا نطبق القانون ، هاكم صندوقا أوجدوا طول قطره الداخلى ، كذلك أوجدوا القطر الداخلى لغرفة الفصل »

ملاحظـــــة : « يستخدم الطلاب القانون لأجاد طول قطر الصندوق ثم يقيسون بالعصا المدرجة)

طالب : «تقريباً ولكن ليس بالضبط »

المعلـــــم : « هل يعنى ذلك أن القانون خطأ »

طالب : « كلا ، إنه يعنى أن قياساتنا ليست دقيقة .»

ملاحظـــــة : (يقيس الطلاب طول وعرض وارتفاع الغرفة ويستخدمون القانون لحساب طول القطر ثم يقيسون القطر باستخدام شريط مدرج)

المعلـــــم : « هل حصلتم على نفس الإجابة ؟ »

طالب : « نعم ، النتيجتان متقاربتان »

المعلـــــم : «هل هاتان الإجابتان تثبتان صحة القانون ؟ »

المعلـــــم : كلا ، إنه ليس مجرد إنه النتائج جاءت صحيحة مرتين يعنى أن القانون صحيح على الإطلاق »

المعلـــــم : كيف نثبت أن القانون صحيح »

ملاحظـــــة : (بعد مناقشة قصيرة ينتهى الفصل إلى أن القانون صحيح لأن نظ بة فيثاغورث

التى يستند اليها صحيحة ، ولأنهم أستخدموا صيغة استنتاجية صحيحة منطقياً فى إيجاد القانون)

المعلـــــــم : « ما الإستراتيجيات العامة التى استخدموها فى حل هذه المشكلة ؟ »

طالب : « استخدمنا نظرية فيثاغورث »

طالب آخـر : « رسمنا شكلًا توضيحياً »

طالب آخـر : « جربنا تطبيق القانون »

المعلـــــــم : « أى شىء آخر ؟ »

طالب : « وضعنا المشكلة فى صياغة أخرى حتى نتمكن من فهمها لأن الصياغة التى ذكرت بها اولًا لم تكن مفهومة »

طالب آخـر : « كان علينا أن نسأل الكثير من الأسئلة »

المعلـــــــم : « من أجاب على هذه الأسئلة »

طالب : « أنت أجبت على بعضها ، ولكن أجبنا نحن على معظمها بأنفسنا »

المعلـــــــم : « هل هذه الاستراتيجيات جيدة لحل أنواع أخرى من المشكلات ؟ »

ملاحظـــــة : (يقرر الفصل أن طريقتهم فى حل المشكلة يمكن أن تكون مفيدة فى حل أنواع أخرى من المشكلات)

بالرغم من هذا المثال الافتراضى فإن المعلم والطلاب ساروا متقدمين فى متتابعة مرتبة من الخطوة (١) إلى الخطوة (٥) . إن مثل هذا الموقف نادراً ما يوجد فى المواقف الحقيقية فى الفصل ، إذ يمكن دمج بعض هذه الخطوات ، ويمكن ترتيبها ، كما يمكن تنفيذ بعضها مرة واحدة . إن المبدأ الأساسى والمفتاحى اللازم تذكره هنا هو أن كثيراً من الأنشطة المحتواه فى الخطوات الخمس لنموذج حل المشكلات يجب أن تُجرى اثناء كل درس من دروس حل المشكلات ، ويمكن تلخيص بعض المبادىء الإضافية لتدريس حل المشكلات للطلاب فيما يلى :

١ - شجع الطلاب على أن يستخدموا استراتيجات منفردة (كل يستخدم استراتيجية)
٢ - شجع التفكير التباعدى (الابتكارى)
٣ - حافظ على التوازن بين العمل الجماعى والعمل الفردى عند حل المشكلة
٤ - أعط الطلاب الكثير من التدريبات لحل مشكلات
٥ - شجع الأسئلة مراراً وتكراراً .
٦ - تأكد من أن الطلاب متمكنين من المتطلبات المسبقة اللازمة لحل مشكلة من مفاهيم وحقائق ومهارات ومبادىء قبل أن يبدأوا فى الحل .
٧ - شجع الطلاب على أن يكتشفوا لأنفسهم مشكلات رياضية وأن يجدوا بأنفسهم حلولًا لها .
٨ - شجع الحدس والابتكار والتحليل المنطقى .
٩ - أخلق جواً من الارتياح وعدم التوتر داخل الفصل أثناء دروس حل المشكلات .

١٠ – عندما يواجهه الطلاب بصعوبات ، قدّم أقتراحات معاونة لاحلولًا كاملة .

١١ – إلق أسئلة تكون بدرجة كافية من العمومية يمكّن من تطبيقها فى حل أنواع مختلفة من المشكلات بالاضافة إلى المكشلة موضع الدراسة .

١٢ – تحاشى أن تقدّم اقتراحات للطلاب تجعل الحل واضحاً تماماً .

١٣ – إلق أسئلة وقدّم اقتراحات يمكن أن تأتى من عند الطلاب أنفسهم ، إذا كانت أسئلتك واقتراحات بعيدة تماماً عن إدراك الطلاب فإنها قد تضعف الأمل لديهم فى التفكير فى مثلها ، كما أنهم قد يرون فى حل المشكلة أملًا بعيد المنال .

١٤ – أيثيب (قدّم حوافز إيجابية) الطلاب الذين يستخدمون استراتيجيات جيدة والذين يحصلون على إجابات صحيحة .

هذه القائمة من المبادىء من أجل تدريس حل المشكلات تقترح سؤالًا واحداً ينبغى على المعلمين أن يسألوه لأنفسهم : « كيف لى أن أعرف ما إذا كنت أتبع هذه المبادىء أو غيرها من المبادىء المناسبة لتدريس حل المشكلات ؟ » من الممكن أن تُقدّم – عن غير قصد – أثناء تدريسك لحل المشكلات معاونات للطلاب قريبة من خوارزمية محددة لحل المشكلات ، وقد يحدث أيضا أنك أنت – وليس الطلاب – التى تسأل معظم الأسئلة ثم تجيب أيضاً على معظمها .

إن أحد الأساليب الجيدة لتقويم استراتيجيتك فى تدريس حل المشكلات أن تسجل – من حين لآخر – لدروسك فيها تسجيلاً صوتياً ومرئياً (فيديو) ، ثم تحلل وتقيّم – مما تشاهده فى الفيديو – نجاحاتك فى تدريس طلابك حل المشكلات ، ويمكن استخدام التسجيل الصوتى لتقويم مدى التزامك وطلابك بالخطوات الخمس المقترحة .

النموذج المعملى للتعليم والتعلم

أظهرت البحوث والمشاهدات فى التربية أن كثيرين من طلاب المدرسة الثانوية يحتاجون فى دراستهم للرياضيات إلى التعامل مع تمثيل محسوس (عيانى) للمفاهيم والمبادىء قبل أن يفهموا التعبيرات المجردة والرمزية للخبرات الرياضية فهماً ذا معنى . إن دراسات بياجية وبرونر ودينز وغيرهم يدعم المقولة بأن التعامل بالأشياء المحسوسة هو نشاط هام فى تعلم الرياضيات . إن التعامل مع التمثيل المحسوس للأفكار الرياضية يجعلها أكثر فهماً ، كما أنها تساعد الطلاب فى تعلم المهارات العامة لحل المشكلات . وفى معمل الرياضيات يحل الطلاب مشكلات ويرتادون مفاهيم رياضية ، يصيغون مبادىء ويجرون عليها تجارب ، ويصلون إلى اكتشافات رياضية من خلال الاشتغال بتمثيلات محسوسة لأفكار مجردة نسبياً . إن دور المعلم فى معمل الرياضيات المدرسية هو دور المنشط والميسر للأنشطة المتمركزة حول استقصاءات واكتشافات الطلاب ، كما أنه المصدر والمنبع الذى يقدم المعاونة عندما يكون هناك حاجة إليها ، والذى يساعد طلابه ليصبحوا متعلمين لديهم اكتفاء ذاتى .

ما هو معمل الرياضيات ؟

معمل الرياضيات عبارة عن بيئة يتعلم فيها الطلاب الرياضيات من خلال ارتياد المفاهيم ، واكتشاف المبادىء أو تطبيق التجريدات الرياضية فى مواقف عملية وقد يكون المعمل مكاناً يذهب إليه الطلاب ليدرسوا المهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية من خلال تمثيلها بأشياء فيزيائية ونماذج رياضية أو أنشطة عملية مثل الألعاب . وفى معمل الرياضيات يصيغ الطلاب المفاهيم والمبادىء المجردة ويطبقوها عن طريق التعامل العملى مع أمثلة محسوسة لهذه الخبرات الرياضية .

ما هو النموذج المعملى لتعليم وتعلم الرياضيات ؟

النموذج المعلمى هو مجموعة من استراتيجيات التعليم والتعلم يرتاد الطلاب بواسطتها الأفكار الرياضية من خلال أنواع كثيرة من أنشطة الطلاب المحكومة فى معمل الرياضيات . ويمكن أن تجرْى هذه الأنشطة الارتيادية من خلال عروض يقوم بها الطلاب أو المعلمون ، واجراءات للدراسة الفردية والجماعية ، وطرق للاكتشاف والاستفصاء ، والعديد من أنشطة حل المشكلات . وبالرغم من أن استراتيجيات التعليم والتعلم المرتبطة بالنموذج المعملى تتميز بأنها متمركزة حول الطالب ، موجهة نحو النشاط ، ولها تمثيل محسوس ، فإن هذه الخصائص يجب ألا يُنظر إليها على أنها شروط لازمة وكافية لمعمل الرياضيات .

إن التيسير الفيزيائى الذى يطلق عليه « معمل الرياضيات » يمكن أن يكون جزءً من فصل الرياضيات ، أو كل فصل الرياضيات ، أوركناً من مكتبة المدرسة ، أو غرفة خاصة بالمدرسة ، أو موقفاً بعيداً عن المدرسة مثل المتحف أو مركز أنشطة أو مركز خدمات فى البيئة . والمصادر التى توجد فى « معمل الرياضيات » تشمل الكتب والألعاب والنماذج والصور والملصقات ومجلات الحائط والأفلام وأجهزة التسجيل والشرائح الشفافة والأدوات والأشياء غير المكلفة ومكاتب للدراسة الفردية وأجهزة ومحطات كومبيوتر وقد تتمثل الأنشطة التى ينشغل بها الطلاب فى المعمل فى استكمال أوراق عمل ، استخدام مصادر ووسائل سمعية وبصرية ، قراءة كتب ، بناء نماذج ، لعب مباريات ، حل مسائل ومشكلات ، بحث عن أنماط ، مناقشة أفكار رياضية أو كتابة وتنفيذ برامج كومبيوتر .

يتضح من المواصفات السابقة لمعمل الرياضيات والنموذج المعلمى للتعليم والتعلم ، أن المدخل المعملى لتدريس الرياضيات لايمكن أن يُعرّف بدقة على أنه مجموعة من المواقف أو الأنشطة .

أهداف استخدام معامل الرياضيات :

يمكن للأنشطة المعملية أن تساعد فى تعلم وتذكر الحقائق وتطبيق المهارات واستيعاب المفاهيم ، وتحليل وتركيب المبادىء والتى تمثل أهدافاً معرفية لتعلم الخبرات الرياضية المباشرة . والأنشطة

المعملية يمكن أيضا أن تساعد الطلاب فى تحقيق الأهداف المعرفية لتعلم الخبرات الرياضية غير المباشره مثل حل المشكلات ، انتقال أثر التعلم ، تعلم كيف نتعلم . ويمكن أيضا أن تساعد الأنشطة المعملية فى الرياضيات فى تحقيق أهداف وجدانية تعلمية مثل الرغبة والارتياح فى الاستجابة للأنشطة الرياضية وتقبل وتفضيل القيم فى دراسة الرياضيات ، وتحقيق إدراك مفاهيمى للقيم الشخصية المرتبطة بالرياضيات والتربية . كما أن هناك أنواع معينة من الطرق المعملية تساعد الطلاب فى أن يتعلموا كيفية العمل الاستقلالى ، بينما تساعدهم طرق أخرى فى أن يتعلموا كيف يعملون مع الآخرين فى أنشطة جماعية .

يصمم النموذج المعملى خصيصاً للتركيز على تحقيق ما يفضله طلاب المدرسة الثانوية وكذلك المتطلبات العقلية لتعلم الرياضيات وذلك من خلال أنشطة فيزيائية محسوسة ويمكن للطلاب أن يكتشفوا مبادىء رياضية عن طريق تجميع معلومات ودراسة خواص نماذج رياضية . ويمكنهم أيضاً البحث عن أنماط رياضية يمكن أن تقودهم إلى تعميمات لقضايا ومشكلات رياضية . ويمكن للطلاب أن يبنوا نماذج زياضية لتوضيح وتيسير توصيل المفاهيم والمبادىء الرياضية المجردة التى تعدهم لإستيعاب هذه المفاهيم والمبادىء عندما تقدم لهم بعد ذلك فى صور أكثر تجريداً وعمومية .

إن الخطوات الخمس لنموذج حل المشكلات (اكتشاف مشكلات عامة ، إعادة صياغة المشكلات العامة فى صورة إجرائية قابلة للحل ، تكوين استراتيجيات لحل المشكلة ، تنفيذ اجراءات حل المشكلة ، تقويم الحلول واستراتيجياتها) يمكن أن تمارس فى مواقف محسوسة فى معمل الرياضيات ، ويمكن أن يكتشف الطلاب تعميمات مثيرة قد تقودهم إلى تكوين مشكلات رياضية ، كما يمكنهم تجريب الطرق العلمية للاستقصاء فى المعمل ، ويمكن أن تُقدم التخمينات هنا وتوضع الفروض المحتملة والتى يمكن اختيارها باستخدام صورة منطقية صحيحة ، كما يمكن أن يعلم الطلاب طبيعة وطرق البرهان الرياضى فى المعمل .

وفى المعمل يمكن إكتشاف ودراسة بعض تطبيقات الرياضيات المفيدة والطريفة . سوف يتعلم الطلاب أن كثيراً من المهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية تنتج عن مواقف فيزيائية وأن المهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية ليست مجرد مجموعات وضعية من القواعد للتعامل مع رموز غير ذات معنى . وتساعد المعامل الطلاب فى تحسين فهمهم للأصول والتطورات التاريخية والعلاقات التاريخية بين الرياضيات وغيرها من العلوم الأخرى .

كما يمكن من خلال الأنشطة المعملية تعلم وممارسة أساليب القياس والتقريب والتقدير . ويمكن أن توضح التجاب المعملية الطبيعة غير الدقيقة وغير المضبوطة لبعض التطبيقات الرياضية . وفى المعمل يمكن للطلاب أن يتعرفوا على وحدات القياس والتحويلات بينها عن طريق الممارسة الفعلية .

وبرغم نشاط طلاب المرحلة الثانوية وامتلائهم بالحيوية والطاقة إلا أنهم لايقومون بأى نشاط فى الاستراتيجيات العادية للتدريس أكثر من القيام بعمليات عقلية من خلال الورقة والقلم . والأنشطة

المعملية توفر فرصاً للطلاب للخروج من هذه الاستراتيجيات التى يسيطر عليها المعلم والمحاضرة مما قد يساعدهم فى اكتساب اتجاهات أفضل نحو تعلم الرياضيات . إن الكثير من الطلاب ممن يلقون القليل من النجاح فى تعلمهم المفاهيم والمبادىء الرياضية من خلال العرض المجرد قد يحققون نتائج أفضل من خلال تعاملهم بالمحسوسات الأقل تجريداً الموجودة بالمعمل . وهذه النجاحات المتواضعة فى المعمل يمكن أن تعمل على تحسين الطلاب بطىء التعلم من حيث تحسن تقديرهم لأنفسهم وتحسن اتجاهاتهم نحو الرياضيات .

وبصفة عامة ، فإن الأنشطة المعملية المصممة تصميماً جيداً فى الرياضيات تمد الطلاب بمشكلات مثيرة للحل باستخدام خبرات رياضية حديثة التعلم ، وتخلق بيئة تعلم مريحة حيث يمكن للطلاب أن يتعلموا حسب خطوهم وسرعة تعلمهم الذاتى وتساعدهم فى تحمل مسئولية تعلمهم بأنفسهم . كما يساعد المدخل المعملى المعلمين فى تحقيق الأهداف المعرفية والوجدانية لتعلم الرياضيات . ويمكن للطلاب فى المعمل أن يتعلموا كيف يتعلمون من خلال الأنشطة المعملية التى يقومون بها .

استراتيجيات التعليم والتعلم لمعامل الرياضيات :

على الرغم من أن الأنشطة المعلمية فى الرياضيات متمركزة حول الطالب ومنفردة وغير رسمية ومحورها النشاط ، إلا أنه لاينبغى ألا تكون منظمة وغير مصممة بنائياً وفى نفس الوقت يجب ألا يسيطر على تنظيمها أو تصميم بنائها المعلم سيطره زائدة ، وعلى المعلم أن يحدد الأنشطة التى من المتوقع أن يقوم بها الطلاب فى حصة معمل الرياضيات وعليه أن يساعدهم فى وضع الأهداف العامة للتعلم لكل درس من دروس المعمل . وعلى الرغم من أن خطة الدرس فى المعمل قد لاتحتاج لأن تكون مفصلة ولامصممة بنائياً بنفس الدرجة التى تُنظم بها فى بعض النماذج الأخرى للتعليم ، إلا أنها يجب أن تتضمن أنشطة التخطيط للدرس بصفة عامة والمندرجة تحت الموضوعات الرئيسية التالية : المحتوى الرياضى ، أهداف التعلم ، مصادر التعلم ، استراتيجيات التقويم القبلى ، استراتيجيات التعليم والتعلم ، استراتيجيات التقويم البعدى .

بالاضافة إلى ذلك ، هناك ثلاثة أنشطة خاصة ينبغى على المعلم أن يقوم بها لإعداد الدرس المعلمى وهى :

١ - الحصول على المصادر التى سوف يستخدمها الطلاب فى أنشطتهم فى معمل الرياضيات ، هناك أربعة أنواع من المصادر : أفكار المعلم وأفكار الطلاب ، المحتوى الرياضى ، استراتيجيات التعليم والتعلم ، المصادر الفيزيائية مثل الأدوات والأجهزة .

٢ - وضع خطط لتنظيم وأستعمال المصادر أثناء الدرس ، والأشراف على أنشطة الطلاب فى المعمل ، يجب أن تتوافر جميع المواد التى يحتاجها الطلاب فى المعمل ، ويجب اختيار المواد التى تمثل خبرات رياضية بعناية وأن تكون مرتبطة بأهداف التعلم المعرفية . والوجدانية ، وينبغى اختيار

المصادر طبقاً لمناسبتها لمستوى السن والقدرات العقلية والجسمية للطلاب مع ضرورة توافر ضمانات الأمن والأمان فى استخدامها وبالرغم من تمتع الطلاب بدرجة من الحرية فى اختيار التجارب المعملية فى الرياضيات فانهم فى نفس الوقت يحتاجون ارشادات حكيمة وغير متسرعة من المعلم ، فالاقتراحات والمساعدات يجب أن تقدم للطلاب الذين يبدو عليهم أنهم يحرزون نجاحات قليلة فى تحقيق أهداف الدرس المعملى . كذلك يجب تقديم المزيد من الأنشطة المتحدية للطلاب الذين ينتهون من مهامهم الأصلية بسرعة ويسر .

٣ - تدريس الطلاب كيفية إستخدام معامل الرياضيات بكفاءة ، فالكثير من الطلاب الذين اعتادوا الدروس المنظمة جيداً والتى تُلقى عليهم مباشرة من المعلم لايعرفون ماذا يفعلون فى المواقف المعملية التى تكون بطبيعتها غير منظمة نسبياً وتتطلب مبادأة إيجابية من الطلاب . ولما كان القيام بتجربة رياضية فى المعمل عمل شبيه بحل مشكلة ، لذا يجب تشجيع الطلاب الذين يعملون فى معمل الرياضيات ، وأن يتم مساعدتهم فى حالة الضرورة على القيام بالاستراتيجات المعملية العامة التالية :

١ - حددالمشكلة ، قرر ماستقوم بعمله ، صِغْ أهدافك .
٢ - فكر فى مداخل لمشكلتك ، ضع خطة ، أوجد طرقاً مختلفة لتحقيق أهدافك .
٣ - احصل على المصادر التى قد تستخدمها فى عملك ، نفذ خطتك ، أبحث عن أنماط وعلاقات وتعميمات ، حاول أن تصل إلى بعض الاكتشافات ، إبحث عن مداخل بديلة ، اجمع بيانات .
٤ - استخلص نتائج ، أجب عن أسئلة ، حل مشكلات ، حلل النتائج التى توصلت إليها ، صغ نتائجك .
٥ - حلل وقيّم طرقك وإجراءاتك ، قارن بين الطرق المختلفة ، قيمّ نتائجك ، ابحث عن علاقات تربط بين نتائجك .

هناك الكثير من استراتيجيات تدريس حل المشكلات التى سبق مناقشتها يمكن أن تستخدم أيضاً فى تدريس الطلاب كيفية العمل فى معمل الرياضيات وقبل أن يقوم الطلاب بمهام معملية فإن معظمهم يحتاج إلى بعض الإعداد العام لكيفية إستخدام معمل الرياضيات .

إذا لم يوجد فى مدرستك غرفة خاصة مجهزة كمعمل للرياضيات فإنه يمكنك استعمال من أركان الفصل كمعمل حيث تخزن وتعرض فيه المصادر المعملية وفى بعض الأحيان ينتقل معملو الرياضيات من غرفة لأخرى لإعطاء دروسهم ، وفى مثل هذه الحالة لابد من التخطيط الجيد لحركة المواد المعملية ، وقد يلزم الأمر أن يكون تخزين هذه المصادر فى مكتب المدرس وربما فى منزله ، وربما يوفر مدير المدرسة مكاناً لتخزين هذه المصادر . وعلى الرغم من أن الفصل المجهز تجهيزاً مناسباً يوفر فرصاً أكبر لاستراتيجيات التعليم والتعلم المعملية إلا أنه ليس من الصعب تصميم دروس معملية جيدة يمكن تنفيذها داخل الفصل العادى وباستخدام مواد بسيطة وقليلة وتتضمن الكثير من الكتب والمقالات عن الأنشطة المعملية فى الرياضيات العديد من الأنشطة التى يمكن تنفيذها فى الفصل العادى وبمصادر قليلة .

هناك أساليب عديدة يمكنك استخدامها فى القيام بدروس معملية :

١ - يمكن القيام بالأنشطه المعملية فى الحصص العادية فى صورة واجبات منزلية أو

٢ - يمكن أن تكون معامل الرياضيات مصمة تصميماً جيداً أو غير ذلك ، ففى بعض الأحيان قد يحتاج الطلاب قدراً كبيراً من الارشاد ولكى يحلوا بعض المشكلات أو يصلوا إلى اكتشافات معينة . وفى مواقف أخرى حيث يكون التأكيد على استراتيجيات حل المشكلات بطرق مستقلة ، قد يكون من الأفضل إعطاء الطلاب القليل من الارشادات والمساعدات .

٣ - يمكن أن تعد دروس المعمل طبقاً لنوع ودرجة المشاركة المباشرة المطلوبة من كل طالب .

وفيما يلى بعض الأساليب العامة لسير العمل فى حصص معمل الرياضيات :

١ - المعلم أو الطالب أو مجموعة من الطلاب قد يقدمون عروضاً أمام الفصل كله .

٢ - قد يعمل كل طالب فى الفصل فردياً على نفس المشكلة المعملية .

٣ - قد يعمل الطلاب معاً فى مجموعات صغيرة على مشكلة مشتركة .

٤ - قد يعمل كل طالب بنفسه على مشكلة تختلف عن المشكلة التى يعمل بها غيره فى المعمل .

٥ - قد تختار مجموعات صغيرة من الطلاب أنشطة خاصة بهم يقومون بها فى حصص المعمل .

وسواء كنت تقوم بتدريس حساب أو جبر أو حساب مثلثات أو هندسة أو موضوعات خاصة فى الرياضيات فهناك استراتيجيات معملية يمكنك وتلاميذك أن تستخدموها فى معامل الرياضيات ، وفيما يلى توضيحاً لستّ استراتيجيات معملية عامة وهى : اكتشاف نظريات وعلاقات ، اكتشاف أنماط ، حل مشكلات ، ارتياد مفاهيم ومبادىء أو تطبيقات فى الرياضيات ، إنماء طرق للتقريب ، تجميع وتحليل البيانات .

(١) اكتشاف نظرية :

يجد الطلاب كما هو الحال عن الرياضيين ارتياحاً فى اكتشاف النظريات ، ويمكن لمعظم الطلاب أن يكتشفوا مع بعض التعليمات العامة الكثير من نظريات الهندسة المستوية من خلال قياس أطوال القطع المستقيمة والزوايا ومقارنة الأشكال الهندسية وعمل الاشكال الورقية وثنيها . فمثلًا إذا توفر لدى الطلاب الفرجار والمنقلة وأوراق العمل يمكنهم اكتشاف نظريات الهندسة الخاصة بالمستقيمات المتوازية وإليك بعض الاقتراحات الارشادية فى هذا الصدد :

أ - ابحث العلاقة بين الزاوية الناشئة من تقاطع مستقيم بمستقيمين متوازيين .

ب - يمكنك أن تقارن الزوايا عن طريق القياس بالمنقلة أو بعض الزوايا وتطبيقها على بعضها .

جـ – أذكر النتائج التى يمكن أن تستخلصها عندما يكون القاطع عمودياً على أحد المستقيمين المتوازيين .

د – افترض أن قاطعاً قطع مستقيمين غير متوازيين ، ما العلاقات بين الزوايا الناشئة فى هذه الحالة ؟

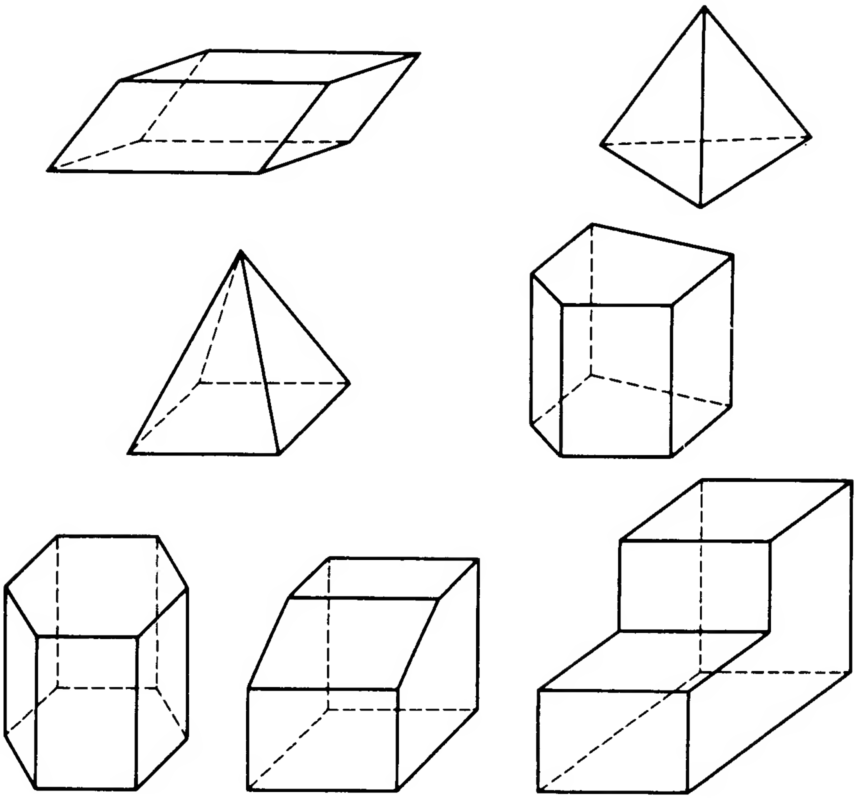
هـ – بناء على ارتياداتك ، هل يمكنك صياغة أى فرض يحدد الشروط اللازم توافرها لتوازى مستقيمين ؟

و – هل تعتقد أن معكوس كل من الفروض التى وضعتها هى أيضا فروض صحيحة ؟

(٢) اكتشاف نمط :

من أكثر خواص الأعداد طرافة وجود التنوع الكبير من الأنماط بين مجموعات الأعداد ومجموعات الأشكال الهندسية . إن إكتشاف وفحص أنماط الأعداد قد يقود إلى أكتشاف الكثير من العلاقات الرياضية الهامة مثل نظرية ذات الحدين والخوارزمية الاقليدية وقوانين مجموع المتواليات الحسابية والهندسية وخواص الإبدال والتجميع والتوزيع وشروط تقارب المتسلسلات العددية . قانون أويلر (Euler) = إذا كان لدينا مجسم كثير الأوجه وكان عدد رءوسه ر [V] بنقطة وعدد أحرفه ح [E] خطاً وعدد أوجهه المستوية ج [F] وجهاً فإن : ح = ر + ج – ٢ [$E = V + F - 2$] ويمكن اكتشاف هذا القانون أو النظرية عن طريق تكوين ودراسة أنماط عددية . ولمعاونة الطلاب فى اكتشاف الأنماط العددية التى تقود إلى هذه النظرية دع كل طالب يكمل الجدول التالى باستخدام المجسمات البسيطة المبينة فى شكل (٤ – ٤)

رقم الشكل	المجسم	عدد الرءوس ر [V]	عدد الأوجه ج [F]	عدد الأحرف ح [F]
١	هرم ثلاثى			
٢	متوازى مستطيلات			
٣	منشور خماسى			
٤	هرم رباعى			
٥	منشور سداسى			
٦	مكعب ناقص			
٧	دَرَج			



شكل ٤ ــ ٤ : بعض الأشكال المجسمة البسيطة

وفيما يلى بعض الأسئلة والمقترحات التى يمكن أن تستخدم فى ارشاد الطلاب نحو اكتشاف قانون أويلر :

أ – هل يمكنك التعرف على نمط بين أعداد الرءوس (س) [V] والأوجه (ح) [E] والأحرف (ج) [F] بحيث عامة بين هذه الخواص الثلاثة لكل شكل ؟

ب –إذا لم يكن فى مقدورك التعرف على علاقة مباشرة ، فيمكنك أن ترى ما إذا كانت واحدة من المغيرات (س ، ج ، ح) [V, F, E] تساوى مجموع أو حاصل ضرب الأثنين الآخرين مضافاً اليه أو مطروحاً منه عدد ثابت .

جـ –عندما تعتقد أنك عثرت على هذه العلاقة ، اكتبها كقانون .

د – انشىء مجسمات أخرى كثيرة الأضلاع وحدد مإذا كانت تحقق القانون الذى توصلت اليه أم لا ؟

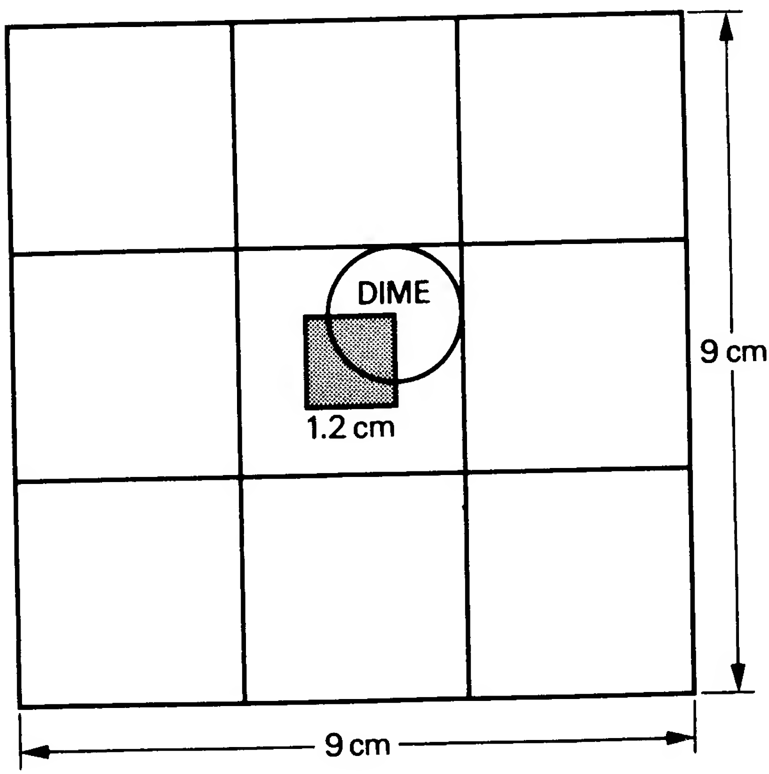
هـ -هل يمكنك أن تفكر فى طريقة لإثبات صحة هذا القانون ؟

(٣) حل مشكلة :

فى الجزء الخاص بحل المشكلات ناقشنا نموذجاً عاماً ذا خمس خطوات لحل المشكلات المشكلة التالية يمكن حلها بطريقتين : (١) إجراء تجريبى يعطى حلًا تقريباً (٢) تحليل استنباطى يعطى الحل المضبوط . والمشكلة هى :

أوجد احتمال أنه إذا ألقيت نقود معدنية بحيث تسقط ساكنة على لوحة مربعات ٣ × ٣ سم ٢ فإنها لاتسقط على أحد خطوط اللوحة .

يمكن تمثيل هذا الموقف كما فى شكل (٤ ـــ ٥) :



شكل (٤ـــ٥) : قطعة نقود تستقر عن شبكة مربعات

ومن الممكن تقديم المقترحات التالية للطلاب :

أ - ارسم شبكه مربعات ٣سم × ٣سم على لوحه ورقية كبيرة ، ثم إلق قطعة النقود عدة مرات بحيث تسقط ساكنة مائة مرة على اللوحة . كيف يمكنك استخدام النتائج لإيجاد احتمال أنها لاتسقط ساكنة على أحد الخطوط فى الشكبة المربعة ، هل الاحتمال المحسوب بهذه الطريقة مضبوط ؟ ولماذا ؟

ب - استخدم مدخلًا استنباطياً صالحاً لإيجاد القيمة المضبوطة للإحتمال بمقارنة مساحة قطعة النقود مع مساحة الشبكة المربعة . كن متنبها لأن النسبة بين المساحتين لاتعطى الاحتمال الصحيح . لم لا ؟

يمكن إيجاد الاحتمال بأن نفترض أن قطعة النقود تستقر بحيث يقع مركزها فى أى نقطة على الشبكة المربعة يبعد بأكثر من ٩ر٠ سم من كل ضلع من أضلاع أحد مربعات الشبكة فإن القطعة لاتستقر على أحد خطوط الشبكة . لذلك فإن المواقع الوحيدة الممكنة لمركز قطع النقود ، بحيث أن القطعة نفسها لاتكون على أحد خطوط الشبكة ، هى أن تقع داخل المربع الذى طول ضلعه ٢ر ١ سم فى شكل (٤ - ٥) . وتكون النسبة بين مساحة هذا المربع الصغير (٢ر ١ × ٢ر ١) إلى مساحة أحد مربعات الشبكة (٣ × ٣) تساوى قيمة إحتمال أن قطعة النقود لاتستقر على أحد خطوط الشبكة أى أن : ل [P] (ليس على الخط) = $\frac{\text{١ر٢ سم} \times \text{١ر٢ سم}}{\text{٣ سم} \times \text{٣ سم}}$ = ١٦ر٠ $\left[P\text{ (not on line)} = \frac{1.2\text{ cm} \times 1.2\text{ cm}}{3\text{ cm} \times 3\text{ cm}} = 0.16 \right]$

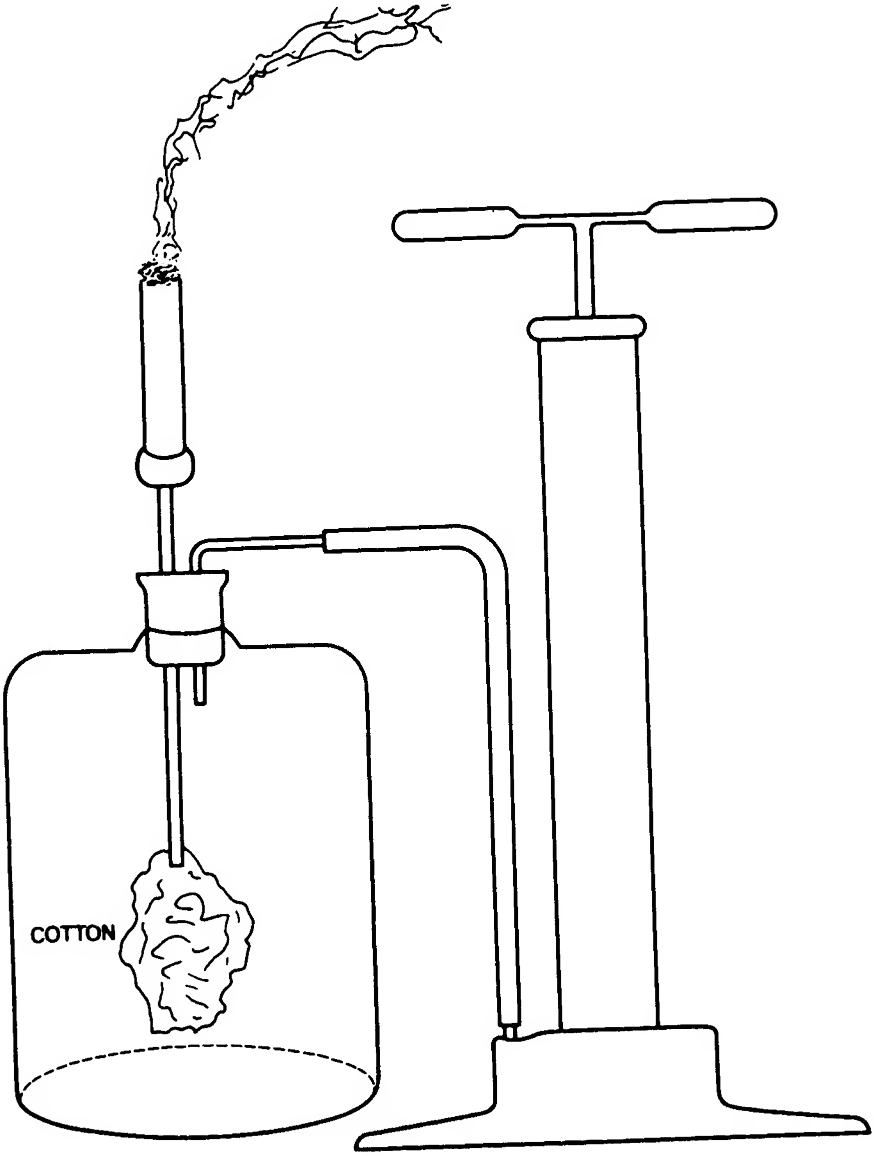
(٤) اكتشاف علاقة رياضية من خلال أحد التطبيقات العملية

كثير من المفاهيم والمبادىء الرياضية تكون مفهومة وذات معنى لدى معظم الطلاب من خلال التدريب بتمثيليات وتطبيقات محسوسة لهذه الخبرات الرياضية ومعمل الرياضيات يمثل موقفاً يمكن فيه للطلاب أن يكتشفوا ويستخدموا المفاهيم والمبادىء الرياضية .

وأحد المبادىء التى يمكن اكتشافها فى معمل الرياضيات ، ويجمع بين عناصر من مجالات تعليمية مختلفة مثل الصحة والعلوم والرياضيات ، هو المبدأ القائل بأن التدخين مضر لرئتى المدخن . والهدف من هذا العرض المعملى هو توضيح أثار التدخين على رئتى أحد الأشخاص ، وقبل بداية العرض تلقى أسئلة كالتالية :

١ - ماذ يحدث داخل رئتى شخص عندما يدخن ؟
٢ - كم تنفساً مطلوباً لتنقية الرئتين من الدخان بعد تدخين سيجارة واحدة ؟
٣ - بعد تنقية الرئة من الدخان ، هل هناك أية فضلات باقية بعد ذلك ؟

هذه التجربة موجودة فى كتاب « رالف فارنا » Varna معمل الرياضيات مدخل جديد للتعليم (١٩٧٥) ويوضح فيه مدخله لاستخدام معمل الرياضيات لمساعدة الطلاب فى فهم قوانين المساحه والشكل . وتتضح الأدوات والمواد المستخدمة فى هذه التجربة فى شكل (٤ – ٦) .



شكل ٤ ــ ٦ جهاز يبين أثار التدخين عن الرئتين

إن النتائج المصاحبة لإحتراق سيجارة يمكن تجميعها فى مرشح ، كما يمكن وزنها إذا ماتوفر ميزان حساس مناسب . وعلى أية حال فإن هذا الجهاز يمثل عرضاً تعليمياً لكمية الدخان والقطرات المختلف عن تدخين سيجارة . وتستخدم مضخه (أو أى بديل مناسب) لسحب الدخان من السيجارة المشتعلة ، وتمتلىء الزجاجة بدخان كثيف لوقت طويل وتمتص قطعة القطن بعض الدخان ، وتنساب السوائل الناتجة من إحتراق السيجارة من خلال أنبوبة إلى قطعة القطن . إن إحتراق علبة سجائر بهذه الطريقة سيحول قطعة القطن إلى حالة مزرية ، وسوف يتضح الفرق فى وزن قطعة القطن قبل وبعد الإحتراق . ويمكن إزالة الدخان الكثيف من داخل الزجاجة بفتح الصمامات وطرده بنفخ الهواء من الفم . ويكون عدد التنفسات المستخدمة فى النفخ يعطى فكرة عن الوقت اللازم – إثر تدخين سيجارة – للتخلص من الدخان العالق بالرئتين . وجدير بالذكر أن مثل هذه التجربة تساعد الطلاب على أن يلمسوا الأثار السيئة والخطيرة للتدخين .

(٥) إنماء طرق التقريب :

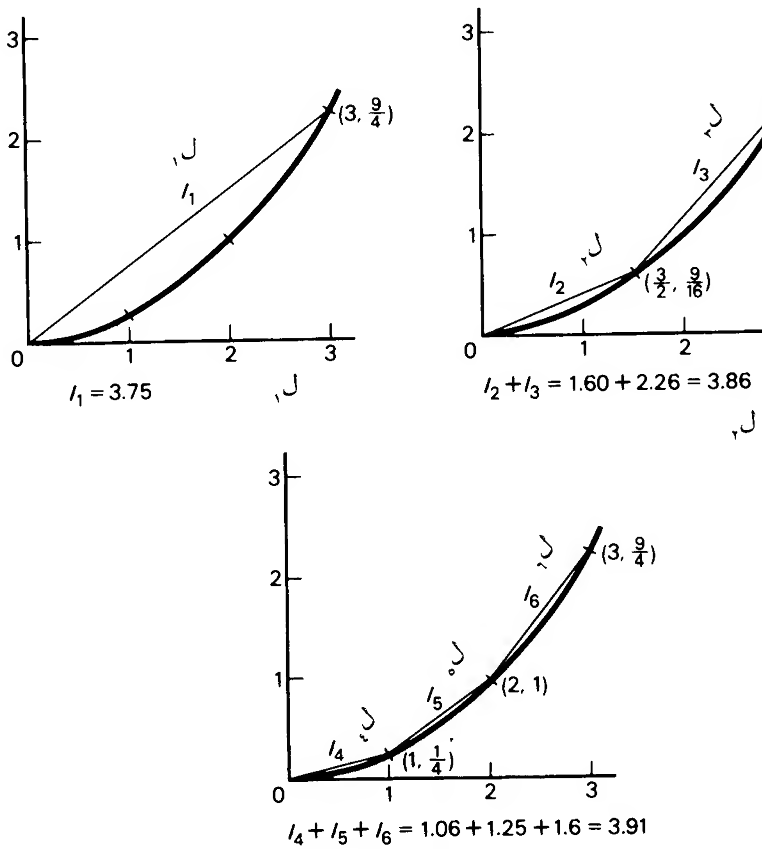
على الرغم من أن الرياضيات تُسمَى علم مضبوط ، إلا أن طرق التقريب التى تُستخدَم فى العلوم الفيزيائية وعلوم المهندسين ، وعلم الحاسبات الألكترونية قد لعبت دوراً هاماً فى التطور التاريخى للرياضيات ، وينبغى أن تلعب دوراً فى رياضيات المرحلة الثانوية . ونحن نقترح أن يكون تدريس مفاهيم التقريبات المتتابعة والنهايات بطريقة حلزونية فى الصفوف المتتالية للمرحلة الثانوية .

فى علم الحُسْبان (التفاضل والتكامل) يمكن تعريف طول منحنى على أنه نهاية متتابعة من التقريبات الخطية للمنحنى . ويمكن فى إحدى حصص الجبر أن يُعطى درساً معملياً يُوجِد فيه الطلاب أطوالاً تقريبية للعديد من المنحنيات المعرفة بدوال رياضية . فمثلاً يُعطى الفصل مجموعة من الدوال والعلاقات كالآتى :

(١) ص = س^{٢} − ٢ س
(٢) ص = س^{٣} − س
(٣) ص = ٢^{س} − س^{٢}
(٤) ص = لو$_{١٠}$ س
(٥) ص = س^{٢} + ٢ س + ٤
(٦) ص = س^{٤} − س^{٣} + س^{٢} − س
(٧) ص = |س^{٣}|
(٨) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

1. $y = x^2 - 2x$
2. $y = x^3 - x$
3. $y = 2^x - x^2$
4. $y = \log_{10}x$
5. $y = x^2 + 2x + 4$
6. $y = x^4 - x^3 + x^2 - x$
7. $y = |x^3|$
8. $x^2 + y^2 = 4.$

ابدأ حصة المعمل بأن تبين للطلاب كيفية إيجاد مجموعة من التقريبات المتتابعة للمحنى المعرّف بالدالة ص = $\frac{س^{٢}}{٤}$ بين س = صفر ، س = ٣ [$y = \frac{x^2}{4}$ between $x = 0$ and $x = 3$] ارسم القطع المكافىء الممثل بالدالة ص = $\frac{س^{٢}}{٤}$ [$y = \frac{x^2}{4}$] على السبورة ، واشرح كيفية استخدام قانون المسافة لإيجاد ثلاثة تقريبات خطية متتابعة لطول هذا المنحنى ، وذلك كما هو مبين بالشكل (٦ - ٧)



تقديرات تقريبية متتابعة لطول المنحنى ص ص من س = صفر إلى س = ٣

وقد ترغب فى أن يعمل الطلاب معاً فى مجموعات صغيرة لإيجاد تتابع من التقريبات لطول معرّف بدالة معينة ، ومع نهاية حصة المعمل دع كل مجموعة تشرح العمل الذى قامت به للمجموعات الأخرى ثم استخلص بعض النتائج العامة عند نقاط القوة والضعف لهذه الطرق .

ويمكنك أن نجعل كل مجموعة تضع فى اعتبارها بعض الأسئلة والأنشطة أثناء العمل فى إيجاد الأطوال التقريبية كما يلى :

(ا) إلى أى مدى يمثل التقريب الذى حصلت عليه طول المنحنى ؟

(ب) هل كل تقريب تالى أفضل من التقريب السابق له ؟

(جـ) هل يمكن أن يكون التقريب الذى تحصل عليه باستخدام قطع مستقيمة كثيرة يختلف كثيراً عن طول المنحنى نتيجة التقريب الذى تحصل عليه باستخدام عدد قليل من القطع المستقيمة ؟

(د) هل هناك ميزات لاستخدام هذه الطريقة من التقريبات المتتابعة ؟

(هـ) ارسم شكلاً بيانياً يمثل التقريبات التى تحصل عليها .

(و) حيث أنه من الممكن تقريب طول جزء من قطع مكافىء باستخدام قطع مستقيمة ، ادرس كيف يمكن استخدام قطع من منحنى القطع المكافىء فى إيجاد طول تقريبى لمنحنى من درجة أعلى . ما الشيء اللازم معرفته حتى يمكن استخدام قطع من منحنى القطع المكافىء ؟

(٦) تجميع وتحليل البيانات :

من بين البيانات التى يمكن أن يحصل عليها الطلاب ويحللوها تلك التى تنشأ عن إلقاء قطعة نقود ورمى زهرتى نرد وتطبيق استبيانات . وكمثال لكيفية إمكان أن يجمع الطلاب ويحللوا بيانات وربما يكتشفوا قوانين وعلاقات ، يمكن تخصيص دروس معملية يقارن فيها الطلاب بين القياسات الفهرنهيتية والمئوية لدرجات الحرارة . ويكون هذا درساً مناسباً فى الجبر كما يعطى خبرة جيدة بالنظام المئوى فى القياس وخاصة بالنسبة للطلاب الذين لايعرفون (أو لايتذكرون) القانون الذى يربط بين القياس المئوى والفهرنهيتى . ويُقسّم الفصل إلى مجموعات صغيرة يكون لدى كل منها ترمومتر فهرنهيتى وآخر مئوى ومصدر للحرارة ، وإناء يتحمل اللهب وبعض مكعبات الثلج ، ثم تقوم كل مجموعة بالأنشطة التالية :

أ - إملأ الوعاء جزئياً بالماء والثلج أغمر الترمومترين فى الوعاء ، وبعد استقرار الزئبق سجل القراءتين (بالفهرنهيتى والمئوى) فى جدول .

ب -سخن الوعاء تدريجياً وسجل القراءات على كل من الترمومترين فى الجدول . ينبغى أن تؤخذ وتسجل درجات كل ٣٠ ثانية تقريباً حتى يغلى الماء بسرعة .

جـ -قارن الأزواج المرتبة من القراءات (فهرنهيتى ، مئوى) ثم حلل هذه البيانات فى محاولة لايجاد قانون يربط بين الميزانين .

د - ارسم شكلًا بيانياً للازواج المرتبة من القراءات على نظام إحداثى متعامد للمساعدة فى الحصول على تخمين تقريبى للقانون .

هـ -بعد نتوصل إلى تخمين جيد ، شجع الفصل كمجموعة فى أن يفكر فى طريقة لإيجاد القانون الدقيق إذا ماأفترضنا أنه سوف يكون على شكل معادلة خطية (من الدرجة الأولى) . بعض

الطلاب قد يقومون بهذه الخطوة بأنفسهم إلا أن البعض الآخر قد يحتاجون إلى إرشادات من المعلم . إن أحد الطرق لايجاد القانون هو افتراض أن ف = أم + ب [$F = aC + b$] حيث ف [F] درجة الحرارة بالفهرنهيتى ، م [C] درجة الحرارة بالمئوية ، أ ، ف [a and b] ثوابت ينبغى تحديدها بأخذ زوجى القراءتين ف ، م [(F, C)] لدرجتى التجمد والغليان وهما (٣٢ ، صفر) ، (٢١٢ ، ١٠٠) على الترتيب . ويمكن إجراء التعويضات التالية لإيجاد قيم أ ، ب [a and b]

First, $F = aC + b$	ف = أم + ب
$32 = a(0) + b \rightarrow 32 = b$	٣٢ = أ(٠) + ب ← ب = ٣٢
therefore, $F = aC + 32$	ف = أم + ٣٢
then, $212 = a(100) + 32$ $1.8 = a$	٢١٢ = ١٠٠أ + ٣٢ ← أ = ١,٨
	لذلك :
therefore, $F = 1.8C + 32$.	ف = ١,٨ م + ٣٢

(و) تبين ما إذا كان هذا القانون يحقق بعض القيم (ف ، م) [(F, C)] التى حصلت عليها بين نقطتى التجمد والغليان .

وتوضح الأمثلة السابقة أنشطة استراتيجيات النموذج المعملى للتعليم والتعلم ، ويمكن للقارىء أن يجد المزيد من الأمثلة فى الكتب والمجلات المتخصصة .

التيسيرات والمصادر اللازمة لمعامل الرياضيات :

يمكن أن تنشأ الأنشطة المعملية من أفكار تصدر عن المعلمين والطلاب ، أو من بعض موضوعات المحتوى الرياضى أو من مصدر فيزيائى أو كإستراتيجيات تعليم وتعلم . ومن ثم فإن النموذج المعملى لتعليم وتعلم الرياضيات يمكن أن يستعمل فى المدرسة التى لايوجد بها غرفة مخصصة للمعمل أو التى ليس بها مواد أو أدوات أو أجهزة أو مصادر معملية أخرى . والاستراتيجيات الست السابقة التى ناقشناها تتطلب بضعاً من المواد قليلة التكلفة والميسور الحصول عليها . وسنورد فيما بعد مناقشة عن المصادر والأجهزة اللازمة لتجهيز غرفة خاصة كمعمل للرياضيات . ومع ذلك فإنه يظل من المهم أن نعتبر أن ارتياد المفاهيم والمبادىء واكتشاف العلاقات والقوانين من خلال أنشطة الورقة والقلم يمكن أن تكون أنشطة مثيرة وممتعة ومثمرة بنفس القدر الذى يمكن أن يحدث من خلال أجهزة وأدوات باهظة التكاليف وفى الحقيقة فإن الأفكار الجيدة أفضل من الأجهزة المكلفة عند استخدام النموذج المعملى .

مصادر أفكار لمعمل الرياضيات :

يمكن أن توجد مصادر جيدة من الأفكار لمعامل الرياضيات فى العديد من الكتب والمجلات ، ففى الكتاب السنوى الرابع والثلاثين الذى أصدره المجلس القومى لمدرسى الرياضيات عام ١٩٧٣ (فى الولايات المتحدة الأمريكية) الكثير من الأفكار المتنوعة الخاصة بمعامل الرياضيات ومراجع من الكتب والمجلات لـ ٦٧ نوعاً مختلفاً من المشروعات المعملية المختلفة ، كذلك تحتوى الكتب التى ألفها فارنا Varna عام ١٩٧٥ ، ماليتسكى (Maletsky) عام ١٩٧٥ ، على كثير من الأفكار لمعامل الرياضيات ، كما تحتوى مجلات « معلم الرياضيات » ، « معلم الحساب » ، « العلوم والرياضيات المدرسية » و « الحساب الإبداعى » الامريكية الكثير من المقالات عن الأنشطة لمعامل الرياضيات بالأضافة إلى نشرة مجلس مدرسى الرياضيات التى تشير أيضاً إلى الجديد فيما ينشر عن مجالات تعليم الرياضيات المختلفة ** ويمكن أن تجد أو تلتقط أفكاراً كثيرة وجيدة لمعمل الرياضيات من كتب الرياضيات وتاريخ الرياضيات*

وعند دراستك لنماذج واستراتيجيات الرياضيات فى هذا الكتاب وغيره يمكنك أن تفكر فى الربط بين بعضها أو تعديلها لتقديم دروس أكثر إثارة ونشاطاً من جانب الطلاب فى حصص الرياضيات . وعندما تخطط للدروس وتفكر فى الاستراتيجيات التى يمكن استخدامها ، فإن الأنشطة المعملية هى إحدى الإمكانات المناسبة .

المعينات السمعية البصرية :

يمكن أن تستخدم المعينات السمعية والبصرية فى مساعدة الطلاب لفهم المفاهيم والعلاقات الرياضية المجردة وفى توضيح تطبيقات الرياضيات وزيادة الإهتمام والميول نحو الرياضيات ولتوفير مجالات للتدريس العلاجى والإثرائى . وفيما يلى قائمة ببعض المصادر السمعية والبصرية الممكنة الاستخدام فى معامل الرياضيات :

١ – سبورة وطباشير ملوّن .
٢ – سبورة ضوئية وشرائح شفافة .
٣ – صور ومصورات وملصقات وأشكال بيانية وخرائط .
٤ – نماذج ورقية وكرتونية وخشبية ومن البلاستيك والخيوط .
٥ – مجلات حائط .

Mathematics Teacher, Arithmetic Teacher, School Science and Mathematics, Creative Computing

(**) فى مصر : انظر مجلة « الرياضيات » وكتب « طرق تدريس الرياضيات » ونشرات ادارة الوسائل التعليمية المركزية بالقاهرة ونظائرها فى الدول العربية الأخرى .

(*) انظر مثلًا كتاب تاريخ الرياضيات تأليف د/ وليم عبيد ، د/ عبد العظيم أنيس وزارة التربية والتعليم ، القاهرة (١٩٨٤) .

٦ – كتب ومجلات .
٧ – أجهزة عرض أفلام ثابتة ، وأفلام ثابتة .
٨ – أجهزة عرض شرائح ، وشرائح .
٩ – أجهزة عرض سينما متحركة ناطقة ، وأفلام سينمائية .
١٠ – أشرطة وأجهزة تسجيل سمعية ومرئية (فيديو) .
١١ – محطات وأجهزة كومبيوتر وملحقاتها .
١٢ – دائرة تليفزيونية مغلقة .

ومن الطبيعى أن بعض المدارس يمكنها اقتناء كل هذه الأجهزة ولكن ليس من الضرورى أن تكون كلها متوفرة فى جميع معامل الرياضيات وفيما عدا أجهزة الكومبيوتر وإلى حد ما أجهزة الفيديو والدوائر التليفزيونية المغلقة فإن كل المدارس بإمكانها اقتناء الأجهزة الباقية (كما أن ادارات الوسائل الاقليمية والمحلية يمكنها أن تمد المعلم بما يحتاج إليه فى معظم مواقع المدارس الثانوية إذا ماأراد أن يقدم دروساً معملية)

أمثلة للأدوات والأجهزة الدائمة اللازمة لمعمل الرياضيات :

فيما يلى بعض المواد والأجهزة الدائمة اللازمة لمعمل الرياضيات أو اللازم تخزينها فى المدرسة لتكون دوماً تحت تصرف المدرسين الراغبين فى تقديم دروس عملية فى الرياضيات :

١ – أدوات قياس وموازين وأوانى وترمومترات (من المستخدمة فى الحياة اليومية العادية) .
٢ – مساطر مدرجة وغير مدرجة بأطوال مختلفة ، مناقل ، فرجارات وأشرطة قياس وسائر أدوات الرسم الهندسى وأدوات النجارة ونماذج الأشكال الهندسية ونماذج للحروف والرموز الرياضية .
٣ – أقلام استنسيل لرسم احداثيات كارتيزية وقطبية على الورق أو على السبورة .
٤ – أدوات بناء مثل الشاكوش والمنشار والمثقاب .
٥ – ألعاب رياضية ومعروضات .
٦ – أدوات خاصة مثل قطع زهر من أحجام مختلفة وأشكال متباينة ، وأجهزة رمى قطع نقود عشوائياً ، ونماذج كومبيوتر وأجهزة علوم ورياضيات .
٧ – حاسبات يدوية وأجهزة مختلفة للحساب الآلى .
٨ – مقصات وأدوات لقطع الأوراق والمواد الأخرى .
٩ – أدوات وأجهزة رسم وانشاءات مثل أدوات رسم المنحنيات والقطوع المخروطية ، والمنحنى الفرنسى والمساطر المتوازية وأدوات قياس الأقواس وأدوات الرسم البيانى الثلاثى البعد .

١٠ –معدادات ثنائية وفرجارات شعاعية ولوحات مثقوبة ومغناطيسية وأجهزة لتعيين ط ومجموعات المحل الهندسى وأجهزة التصميم وحقائب الانشاءات الهندسية والألعاب الورقية والعددية .

١١ –مناقل جاذبية ومناقل أيسومترية وأدوات قياس خرائط ومرايا ومناشير وأجهزة قياس الارتفاع (sextant) ★

النموذج الاستقصائى للتعليم والتعلم

النموذج الاستقصائى هو حالة خاصة من نموذج حل المشكلات الأكثر عمومية ، ومن ثم فإن كثيراً من أهداف وأنشطة نموذج حل المشكلات تنطبق على التعلم عن طريق الاستقصاء . والاستقصاء هو عملية فحص واختيار موقف ما بحثاً عن معلومات وحقائق صادقه . وتستخدم عمليات الاستقصاء فى العلوم والرياضيات لتوسيع وتنظيم المعارف .

والخطوات أو المراحل الأربع لاستقصاء موقف ماهى :

١ – صياغة سؤال ، مواجهة موقف ملغز ، متناقض أو به عدم إتفاق ، أو محاولة لتنظيم مجموعة من الحقائق والمفاهيم والمبادىء فى مبدأ عام شامل .

٢ – انماء خطوات إجرائية وتجميع البيانات التى قد تستخدم فى حل موقف مشكل تحت الدراسة .

٣ – إستخدام الاجراءات والمعلومات من الخطوة (٢) لإعادة تنظيم المعارف الموجودة وتوسيعها .

٤ – تحليل وتقويم عملية الاستقصاء ذاتها بقصد إنماء عمليات عامة لبحث مواقف أخرى .

كما هو واضح ، فإن هذه المراحل الأربع للاستقصاء شبيهه بالخطوات الخمس للنموذج العام لحل المشكلات . ومع ذلك فإن عملية الإستقصاء هى أسلوب متخصص فى توسيع المعارف من خلال البحث وتسمى أحيانا الطريقة المعملية للبحث . والإستقصاء طريقة ذاتية المبادأه للتعلم الذى يمكن أن يجرى فردياً أو فى مجموعات صغيرة . والموقف الاستقصائى المثالى فى حصة الرياضيات يتأتى عندما يصيغ الطلاب علاقات رياضية جديدة إما من خلال عمل منفرد أو عمل فى جماعات صغيرة تحت أقل قدر ممكن من إشراف المعلم ، والدور الرئيسى للمعلم فى الدرس الاستقصائى هو دور المنسق .

(★) انظر الكتاب السنوى الرابع والثلاثين لمجلس مدرسى الرياضيات الامريكى NCTM الصادر عام ١٩٧٣ . وفى الكتب العربية انظر مثلا كتاب : دليل الوسائل التعليمية لإنتاج الادارة العامة للوسائل التعليمية ج . ع . م – مركز التوثيق التربوى – القاهرة ١٩٧٠ .

مراحل عملية الاستقصاء

المرحلة (١) مواجهة موقف ملغز أو محاولة أكتشاف مبدأ :

وأفضل مدخل لها أن يكون الشخص محباً للاستطلاع أى أن يكون مشاهداً ومحللًا ومقوماً لمواقف وملقياً لاسئلة . أن أبرع من يسأل أفضل الأسئلة هم أكثر المتمكنين من حل المشكلات وأكثر باحثى الرياضيات نجاحاً . إذ تقود الأسئلة الجيدة إلى مبادىء مفيدة وينتج عنها حلول لمشكلات صعبة . ولكى يجد الفرد مجالات مفيدة ومثيرة للإستقصاء فى الرياضيات يكون من اللازم الذهاب إلى أبعد مما هو معطى وعمل أكثر مما هو مطلوب . سَلْ أسئلة مثل : لماذا تصلح هذه الخوارزمية ؟ لماذا لم تؤد هذه الطريقة إلى الاجابة الصحيحة ؟ هل توجد طريقة أفضل للقيام بهذا العمل ؟ هل توجد هنا أنماط عامة ؟ هل تقترح هذه النظرية نظريات أخرى ؟ هل هذه المشكلة واحدة من منظومة معينة من المشكلات ؟ هل يمكن استنتاج أية تعميمات ؟ مالفرق بين هذين الموقفين ؟ ماأوجه التشابه بين هذين النظامين الرياضيين ؟ هل هذه الحالة الخاصة دائما صواب ؟ هل يوجد مثل مضاد ؟ هل يوجد مدخل أفضل لمهاجمة هذه المشكلة ؟ ماذا يحدث لو تمت هذه التغييرات ؟ هل هذا الموقف يمثل تناقضاً ؟ هل يوجد هنا عدم اتفاق ؟ هل يمكن إعادة تنظيم هذه المعلومات ؟ هل يمكن توسيع هذا المبدأ ؟ ما هى بعض الأمثلة لهذا المفهوم ؟

المرحلة (٢) إنماء خطوات اجرائية وتجميع بيانات لاستخدامها فى دراسة مواقف مختلفة :

وهذه الخطوة يمكن أن تتم بطريقتين : (أ) أفضل طريق لإيجاد إجراءات جديدة لحل المشكلات هو أن يكون الفرد على دراية بأساليب متنوعة من الطرق المعروفة لحل المشكلات والطرق الرياضية الشائعة . فكثير من الاستراتيجيات الجديدة لحل المشكلات عبارة عن توليفات أو تبديلات جديدة لطرق معروفة . وعبر التاريخ قام الرياضيون بحل بعض المشكلات الرياضية فى أحد فروع الرياضيات باستخدام طرق كانت تستخدم فى فروع أخرى . وإذا لم تصلح الطرق الواضحة المعروفة فإن الفرد لابد وأن يفكر فى طرق غير معتادة . (ب) يتطلب حل المشكلات والمواقف الصعبة تحديد وتنظيم المعلومات . والشخص الذى يعرف أنواعاً عديدة من المعلومات ومصادرها ، والذى يكون بارعاً فى جمع وتصنيف وتحليل وتقويم وتركيب المعلومات هو أكثر احتمالًا أن يكون ناجحاً فى حل المشكلات . ومن المناسب عند تجميع وتنظيم المعلومات أن يسأل الفرد أسئلة مثل : ماهى المراجع المعيارية فى هذا المجال ؟ أين يمكن أن توجد هذه المراجع ؟ ماهى المصادر الأخرى للمعلومات ؟ مامدى موثوقية مصادر هذه المعلومات ؟ مامدى جودة نوعية هذه المعلومات ؟ هل مصدر هذه المعلومات يقترح مصادراً أخرى ؟ مامدى الفائدة من هذه المعلومات ؟ كيف يمكن الربط بين هذه المعلومات وتنظيمها ؟ ماالمفاهيم والعلاقات والطرق المتضمنة فى هذه المعلومات ؟ هل هذه المعلومات مرتبطة بالمشكلة موضع الدراسة ؟ وكيف يمكن استخدامها فى الحل ؟ وهل يمكن تبسيط هذه المعلومات والإجراءات لاستخدامها فى مواقف أخرى ؟ .

المرحلة (٣) إعادة تنظيم المعارف الموجودة وتوسيعها :

فى هذه المرحلة يتم الاكتشاف أو يتم حل المشكلة ، أو برهان النظرية وهنا تبنى العلاقات وتصاغ المبادىء وتحدد التركيبات وتستخلص النتائج ، وبذلك تتولد معلومات جديدة وتتسع وتمتد المعارف . وهذه المرحلة من الاستقصاء فردية وشخصية جداً وتظهر فيها عناصر العبقرية والأصالة حيث القدرات الخاصة على التحليل والتركيب والتقويم ويتطلب إعادة تنظيم المعارف وتوسيعها أنشطة مثل : ابحث عن علاقات وعن أنماط . خذ وجهة نظر جديدة . تجاوز حدود البيانات المعروضة . حاول تجرب مداخل مختلفة أعد تنظيم معلوماتك . إبحث عن تعميم ابحث عن أمثلة أو أمثلة مضادة . صغ نتاءجك برهن على صحة نتائجك . نظم نتائجك واعرضها بصورة يمكن للآخرين فهمها .

المرحلة (٤) تحليل وتقويم الإستقصاء :

وتجرى هذه المرحلة بقصد الوصول إلى فهم أفضل ولتحسين طرق الاستقصاء . وهنا ينتقل التركيز من حل موقف خاص إلى التفكير فى عملية الاستقصاء ذاتها . إن كل مجال معرفى له طرق الاستقصاء الخاص به ، وأحد أهداف الباحثين هو تحسين استراتيجيات الاستقصاء الموجودة فى مجالاتهم ، والتوصل إلى عمليات استقصاء جديدة يمكن استخدامها فى توسيع وتحسين الطرق القائمة كل فى مجاله . وهنا يمكن إثارة العديد من الأسئلة ومحاولة الاجابة عليها مثل : ماالاجراءات التى أستخدمت لصياغة المشكلة ؟ مالذى ساعد على أكتشاف التعميم ؟ كيف اكتشف النمط ؟ مالذى أدى إلى اكتشاف تناقض أو عدم اتفاق ؟ أى مصادر المعلومات كانت أكثر فائدة ؟ ماالخطوات التى أُستخدِمت لتوليد بيانات وتجميعها ؟ مالصور المنطقية التى أستخدِمت لحل المشكلة ؟ ماعمليات الفكر التى استخدمت للتوصل إلى النتيجة ؟ هل يمكن تعميم الطرق المستخدمة فى حل هذه المشكلة لتطبيقها فى حل مشكلات أخرى ؟

طرق تعليم وتعلم الإستقصاء :

هناك هدفان تربويان عامّان لكل مجال أكاديمى هما : (أ) تدريس المفاهيم والحقائق والمهارات والمبادىء المتضمنة فى المجال ، (ب) التعريف بالعمليات العامة المستخدمة لحل المشكلات والاستقصاء فى هذا المجال . وبالتحديد فإن أحد أهداف تدريس الرياضيات : تعليم الطرق المتميزة للاستقصاء الرياضى لطلاب الرياضيات ، وهذا يعنى أن يَدْرس الطلاب الطرق الاستقصائية لكى يتعلموا كيفية القيام بعمليات الاستقصاء فى الرياضيات .

وفيما يلى بعض أهداف النموذج الاستقصائى التى تُصنف تحت ذلك الهدف العام :

١ – أن ينمى الطلاب المهارات العقلية للبحث عن المعلومات ومعالجتها .
٢ – أن يتعلم الطلاب مبادىء المنطق .

٣ – أن يفهم الطلاب العلاقات السببية (السبب ، والنتيجة)
٤ – أن يتعلم الطلاب القيام بالاستقصاء ذاتياً وبطرق مثمرة .
٥ – أن يكتشف الطلاب العلاقات بين المتغيرات التى تؤدى إلى تعميمات .
٦ – أن يقدّر الطلاب القيمة العالية لاستراتيجيات الاستقصاء كوسائل لعمل اكتشافات وحل مشكلات .
٧ – أن يفهم الطلاب طرق البرهنة واجراءات حل المشكلات فى الرياضيات .
٨ – أن يحصل الطلاب على أفضل فهم لطبيعة الرياضيات وطبيعة التعلم .
٩ – أن يكتشف الطلاب الخوارزميات والمبادىء الرياضية .
١٠ – أن يُثمِّن الطلاب الطرق التى يستخدمها باحثو الرياضيات .

إن الخطوة الأولى فى تعليم الطلاب كيفية استخدام الطرق الاستقصائية وكيفية تعلم الرياضيات من خلال الاستقصاء هى تقديم وشرح ومناقشة المراحل الاربع لعملية الاستقصاء حيث ينبغى أن يناقش الطلاب الاسئلة والأنشطة المتضمنة فى هذه المراحل . كما ينبغى أن يضيفوا بعض الأسئلة والأنشطة من عندهم لانجاز كل من تلك المراحل .

ولكى يتعلم الطلاب القيام بالمرحلة الأولى ينبغى أن يُشجعوا على البحث عن أنماط وتعميمات وأن يثابوا على تخميناتهم وفروضهم المحتملة ، فحب الاستطلاع والتخمين يجب أن تكون من السمات القيمّة التى يجب تعلمها فى حصص الرياضيات . وعلى المعلمين أن يدفعوا الطلاب إلى اقتراح وتحليل خورزاميات وعلاقات رياضية والاشتراك فى ألعاب وبرهنة نظريات من خلال أسئلة تلقى عليهم وواجبات منزلية تعطى لهم . إن الطلاب بطبيعتهم محبون للاستطلاع ، والرياضيات مليئة بالخبرات التى تثير حب الاستطلاع . وعلى المعلم ألا يهمل اسئلة الطلاب أو يجيب عليها اجابات سطحية أو متعجلة أو يؤجل الاجابة عليها ، وذلك لكى ينجح النموذج الاستقصائى فى تدريس الرياضيات ، كما يجب على المعلمين أيضا أن يعطوا أمثلة حية لطلابهم فى احترامهم للأسئلة وتقديرهم لدورها كنشاط هام جداً فى تعلم الرياضيات .

هذا ، ويحتاج معظم الطلاب إلى رعاية عند قيامهم بالمرحلة الثانية للاستقصاء فطلاب الرياضيات ليسوا ممتازين فى التعرف على مواقع المعلومات وإنماء خطوات تجميع البيانات لاستخدامها فى حل المشكلات الرياضية . وهناك أسباب عديدة لقصور الطلاب فى هذه الأنشطة : (أ) التعرف على مواقع المعلومات واستخدامها لاينظر إليه عادة على أنه نشاط هام فى رياضيات المرحلة الثانوية . فالمعلمون وكتب المدرسة هى المصادر الأساسية إن لم تكن النهائية للمعلومات الرياضية . (ب) مهارات القراءة والبحث فى المكتبة عمل مهمل فى حصص الرياضيات ولايرد الى ذهن الطلاب أن يستخدموا مصادر من المكتبة لتعلم الرياضيات (جـ) على الرغم من إزدياد معامل الرياضيات فى المدارس إلا أن الكثير من الطلاب لديهم خبرات قليله فى توليد وتنظيم وتجميع البيانات فى معمل الرياضيات . فاستخدام المكتبة والمعامل غالبا مايقتصر على حصص اللغات والعلوم . ويجب على

معلمى الرياضيات أن يطلبوا من طلابهم واجبات تقتضى بحوثاً من المكتبة وتجميع بيانات معملية ، ثم متابعة تقييمها .

وبالنسبة للمرحلة الثالثة فى الاستقصاء وهى مرحلة إعادة تنظيم المعارف المتوفرة وتوسيع دائرتها ، فإن الأمر يتطلب مبادأة وأعمالًا فردية من جانب الطلاب . وإعادة تنظيم المعلومات وتوسيع دائرتها أمر صعب لايتأتى إلا من خلال التدريب على استخدام الاستراتيجيات العامة لحل المشكلات . وفى هذه المرحلة يجب أن يعمل الطلاب منفردين أو فى مجموعات صغيرة مع أقل قدر ممكن من معاونة المعلم . وبالرغم من أن قيام المعلم بنفسه بإعادة تنظيم المعلومات والإضافة اليها قد يبدو مغرياً أو أكثر تأثيراً إلا أن ذلك يعتبر خيانة للهدف الرئيسى للنموذج الاستقصائى ، وهو أن يتعلم الطلاب كيف يستقصون . وتجرى هذه المرحلة ببطء حيث من المهم أن يتفادى المعلم التدخل وإعطاء الطلاب معلومات جاهزة . فليس المقصود من درس الاستقصاء تغطية المادة التعليمية على عجل ، فعند استخدام الاستقصاء يصبح المحتوى فى درجة ثانوية من الأهمية بالنسبة لتعلم عملية الاستقصاء ذاتها .

والمرحلة الرابعة – تحليل وتقويم الطرق الاستقصائية – قد تكون أكثر المراحل أهمية فى عملية الاستقصاء . وهنا يسأل الباحث أو المتعلم نفسه : ماذا تعلمت عن التعلم ؟ وبذلك يصل الطالب إلى فهم أفضل للطرق والأساليب الرياضية من خلال تقويمه لطرق الاستقصاء وأن يسأل نفسه العديد من الأسئلة التى سبق الاشارة إليها . ويمكن للمعلم فى هذه المرحلة أن يلعب دوراً أكبر بأن يسأل طلابه اسئلة تقودهم الى تحليل وتقويم طرقهم ، وبالقرب من نهاية **كل درس استقصاء ينبغى** على الطلاب أن يحاولوا الإجابة على السؤال : « **ماذا تعلمت** عن الرياضيات ؟ **وماذا تعلمت عن** تعلم الرياضيات من خلال الاستراتيجيات الاستقصاء » .

إن أفضل طريقة لتعلم طرق الاستقصاء هى أن تستقصى ، وأفضل طريقة لتعلم نموذج التعليم والتعلم الاستقصائى هى أن تشاهد درساً استقصائياً يستخدم هذا النموذج .

درس استقصائى فى موضوع الإحتمالات

المحتوى الرياضى (موضوع الدرس) : مثال من التحرك العشوائى .

الخبرات الرياضية : مفاهيم ومبادىء من نظرية الاحتمال .

يتطلب هذا الدرس بضع مهارات خاصة والقليل من المعارف الرياضية . إلا أنه يتطلب بعض النضوج الرياضى وأن يكون الطلاب على دراية باستراتيجيات الاستقصاء .

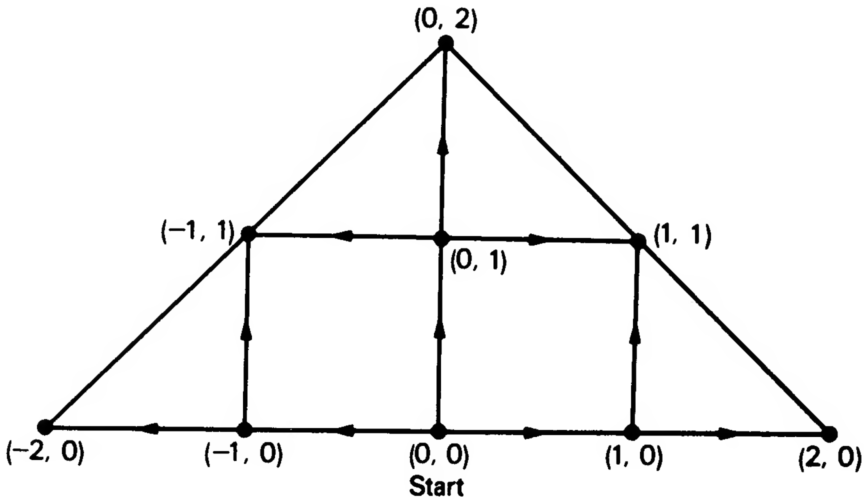
أهداف التعلم :

هدف التعلم المعرفى لهذا الدرس هو تطبيق عملية الاستقصاء . وبتعبير آخر أن الطلاب سوف يقومون بتطبيق عملية الاستقصاء لموقف فى نظرية الاحتمال بحيث يؤدى إلى إثارة الكثير من الأسئلة

والاجابة على بعضها . والهدف الوجدانى هو تعريف الطلاب بأهمية عملية الاستقصاء وكوسيلة لصياغة اسئلة مثيرة والإجابة عليها وبالتالى اكتشاف مزيد من الأسئلة .

مصادر ووسائل التعلم :

الوسائل اللازمة لهذا الدرس هى قطعتا نقود معدنية ونسخة من الشكل المبين (٤ — ٨) لكل طالب بالاضافة إلى أوراق للتسويدة .



استراتيجيات التقويم القبلى :

بالاضافة إلى النضوج الرياضى ومعرفة عمليات الاستقصاء يجب أن يعرف الطلاب احتمال
حدوث (ص ، ص) ، (ك ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ك) [(H, H), (T, H), (H, T), and
(T,T)] عند إلقاء عملتين أنياً (ص [H] = صورة ، ك [T] = كتابة) ح$_{٢}$ هو
ل$_{٢}$ [E_2 is P_2] وينبغى أن يعرفوا أيضاً أنه إذا كان إحتمال وقوع ح$_{١}$ هو ل$_{١}$[E_1 is P_1]
ووقوع حدث فإن احتمال وقوع ح$_{١}$ ثم ح$_{٢}$ هو ل$_{١}$ ل$_{٢}$ [E_1 and E_2 are P_1 P_2] حيث ح$_{١}$ ،
ح$_{٢}$ [E_1 and E_2] حدثان مستقلان ، وأن إحتمال وقوع ح$_{١}$ أو ح$_{٢}$ هو ل$_{١}$ + ل$_{٢}$ [E_1 or E_2 is
$P_1 + P_2$] .

ويمكن استخدام مناقشة قصيرة فى أول الحصة للتحقق من معرفة وفهم هذه المبادىء فى الاحتمالات .

استراتيجيات التعليم والتعلم :

إبدأ الدرس برسم الشكل السابق (٤ – ٨) على السبورة ثم اعطِ كل طالب نسخة من الشكل ، ثم قدّم الشرح التالى ليفكر فيه الطلاب :

افترض أن علامة وضعت عن النقطة (٠ ، ٠) ثم حُرِّكت طبقاً للقواعد التالية :

إلقِ قطعتى نقود آنياً ، فإذا استقرت القطعتان بالوضع (ص ، ص) [(H, H)] حرِّك العلامة وحدة مسافة إلى اليمين ، وإذا استقرت (ك ، ك) [(T, T)] حركها وحدة مسافة إلى اليسار وإذا استقرت بأحد الوضعين (ص ، ك) و (ك ، ص) [(H, T) or (T, H)] حرِّك العلامة وحدة مسافة لأعلى . إلقِ القطعتين مرتين ثم حرِّك العلامة حركتين (يمين أو يسار أو أعلى) طبقا للتعليمات بعد القاء القطعتين مرتين فإن العلامة قد تكون عند أحد نقاط ساق المثلث (−٢ ، ٠) أو (− ١ ، ١) أو (٠ ، ٢) أو (١ ، ١) أو (٢ ، ٠)

سَلْ كل طالب أو مجموعات صغيرة من الطلاب لحساب الاحتمال بأن تستقر العلامة على كلٍ من النقاط الخمس . فيجب أن يحسبوا مجموعة الاحتمالات الآتية :

$$\text{ل}\,(-٢ ، ٠) = \left(\frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤}\right) = \frac{١}{١٦}$$

$$p(-2, 0) = \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$\text{ل}\,(-١ ، ١) = \left(\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٤}\times\frac{١}{٢}\right) = \frac{٤}{١٦}$$

$$p(-1, 1) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16}$$

$$\text{ل}\,(٠ ، ٢) = \frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢} = \frac{٤}{١٦}$$

$$p(0, 2) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16}$$

$$\text{ل}\,(١ ، ١) = \left[\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٤}\right]+\left[\frac{١}{٤}\times\frac{١}{٢}\right] = \frac{٤}{١٦}$$

$$p(1, 1) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{16}$$

$$\text{ل}\,(٢ ، ٠) = \frac{١}{٤}\times\frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$$

$$p(2, 0) = \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

عند الوصول إلى هذه النقطة من الدرس ينبغى أن تجرى مناقشة بين الطلاب دون تدخل المعلم ما لم يشعر بأن الفصل على وشك أن ينهى التفكير فى الوقت فإذا مابدا أن الطلاب فقدوا أهتمامهم أو أحرزوا تقدماً قليلًا فى مراحل الاستقصاء فإنه يصبح لزاماً على المعلم أن يثير أسئلة قيادية . وفى بعض الأحيان قد يوجه الطلاب أسئلة للمعلم وبقدر الإمكان على المعلم إجابة كل سؤال بتوجية سؤال آخر أو تقديم اقتراح بدلًا من تقديم إجابات مباشرة . إذا أن أحد أهداف الدروس الاستقصائية أن يقوم الطلاب باكتشافات بإنشغالهم – مستقلين – فى التفكير فى مشكلة ما ، مما يدعو إلى الحد من تدخل المعلم بأقصى درجة ممكنة .

والحوار التالى يمكن أن يثير تفكير الطلاب :

طالب : مجموع الخمسة احتمالات لا يساوى الواحد الصحيح !!

$$\frac{١}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{٤}{١٦} + \frac{١}{١٦} = \frac{١٤}{١٦}$$

طالب : هذا ما حصلت عليه أيضاً

طالب : أشك فى ذلك ، فقد نكون وقعنا فى نفس الخطأ .

ملاحظـــــة : (يبدأ كثير من الطلاب فى فحص حساباتهم والبعض الآخر يناقش الموقف . وبعد عدة دقائق يصل أحد الطلاب إلى مفتاح اللغز) .

طالب : لقد عثرت على الخطأ . من الممكن ان تظل حبيساً داخل المثلث .

طـالب آخر : ماذا تعنى ؟

الطالب الأول : (يذهب إلى السبورة ويشير إلى الرسم) . أنظر هنا (. ، .) واحصل على (ص ، ص) ((H, H)) تحرك إلى اليمين ثم إذا ما حصلت على (ك ،ك ((T, T)) تحرك إلى اليسار وهذا يعود بك إلى (. ، .) بعد رميتين .

طـالب آخر : إن احتمال حدوث هذا هو ($١ - \frac{١٤}{١٦}$) أى $\frac{٢}{١٦}$. (ثم يوجه الطالب سؤالًا إلى المعلم) هل أنا على صواب ؟

المعلـــــم : لماذا لا تستخدم احتمالاتك للتحقق من صحة ما تقول ؟

ملاحظـــــه : (يبدأ الطلاب فى الانشغال بهذه المشكلة) .

طالب : حقاً إنك على صواب . انظر إن احتمال أن تبدأ من (. ، .) والتحرك يسار – يمين هو $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}$ واحتمال التحرك يمين – يسار هو أيضا $\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}$ ، وأى منهما يمكن أن يحدث ، لذلك فإن احتمال أن تبقى جبيساً داخل المثلث هو :

$$(\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}) + (\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤}) = \frac{٢}{١٦}$$

طـالب آخر : من الجائز أن تكون حبيساً عند النقطة (. ،١)

طـالب آخر : كلا ، هذا مستحيل ، فالطريقة الوحيدة لأن تكون حبيساً هو الانتهاء عند النقطة (. ، .) .

ملاحظـــــة : (يوافق الفصل كله على هذه الملاحظة) .

ملاحظـــــة : (يبدو أن الفصل استراح بهذا الحل للمشكلة وبدأوا يتحدثون عن أشياء أخرى ، وعند هذه النقطة يصبح تدخل المعلم ضرورياً) .

المعلـــــم : إذا حدث احتباس داخل المثلث بعد رميتين لقطعتى النفقود ، لمذا لا تلقون القعطتين مرة إضافية لمحاولة الوصول إلى نقطة على ضلع المثلث ؟

طـــــالب : ذلك لن يمكنكم من الخروج ، لانكم ستكونون حبيسين عند (٠ ، ٠) وأن الرمية الإضافية لن تخرجكم من المثلث مهما حدث .

طـالب آخر : يمكنكم الاستمرار فى إلقاء قطعتى النقود حتى تخرجون .

المعلـــــم : ترى ماذا تكون الاحتمالات اذا فعلتم ذلك ؟

طالب : سنرى ذلك .

طـالب آخر : هذا مستحيل ، لأنه علينا أن نظل نلقى قطعتى النقود إلى مالا نهاية .

الطالب الأول : نعم ، ولكنه من الممكن أن يحدث .

طـالب آخر : يمكن أن نوجد الاحتمال لرميتين ، ثلاث ، أربع ، خمس .... وهكذا ، وقد نحصل على متتابعة من الاحتمالات .

طـالب آخر : ومن الممكن أن توجد نهاية المتتابعة .

طـالب آخر : بالنسبة لى فالأمر يشبه الاستقراء الرياضى ، وقد نحصل على قانون نثبته بالاستقراء الرياضى .

طـالب آخر : دعنا نحاول ٣ رميات .

طـالب آخر : لقد قررنا قبل ذلك أنه إذا وقعنا فى الاحتباس داخل المثلث بعد محاولتين فإن الأمر سوف يحتاج إلى رميتين إضافيتين على الأقل للخروج من داخل المثلث .

طـالب آخر : دعنا نحاول حساب احتمال أن نظل حبيسين داخل المثلث بعد أربع رميات ثم نتحرك من هذا المنطلق .

ملاحظـــــة : (يقرر الفصل أن اقتراح الطالب جيد ، لذلك يبدأون فى اعتبار الوضع فى حالة القاء رميتين إضافيتين بعد الاحتباس عند (٠ ، ٠) وذلك بعد الرميتين الأولتين للقطعتين)

طالب : عندما نقع فى الاحتباس داخل المثلث بعد رميتين فإننا نعود مرة ثانية للنقطة (٠ ، ٠) ، لذلك فإن رميتين اضافيتين ستعطى نفس الشىء كأننا نبدأ من جديد .

طـالب آخر : هذا صحيح ، لذا فإن احتمال أن نقع حبيسين داخل المثلث بعد أربع رميات مازال يساوى $\frac{١}{١٦}$.

طـالب آخر : كلا ، إنه ليس كذلك ، ذلك أن احتمال عدم الخروج من داخل المثلث بعد

محاولتين يساوى $\frac{٢}{١٦}$ ، واحتمال عدم الخروج بعد رميتين أخريين (أى بعد أربع محاولات) يساوى $\frac{٢}{١٦} \times \frac{٢}{١٦}$ أى $\frac{١}{٦٤}$.

طالب آخر : حسناً ، عدم الخروج فى المرة الأولى ثم عدم الخروج فى المرة الثانية حدثان مستقلان واحتمال حدوثهما واحداً بعد الآخر يساوى حاصل ضرب احتمال حدوث كل منهما .

ملاحظة : (بعد مناقشة قصيرة لهذا الموقف يوافق الفصل على أن احتمال الوقوع فى الاحتباس داخل المثلث بعد أربع محاولات يساوى $\frac{١}{٦٤}$)

طالب : حسناً ، دعنا نحاول الأمر بعد خمس رميات .

طالب آخر : لسنا بحاجة إلى النظر إلى خمس رميات ، لأنه إذا ظللت حبيساً بعد أربع رميات فأنك عند النقطة (٠ ، ٠) ورمية إضافية لن تخرجك من المثلث .

ملاحظة : (يتفق الفصل مع هذا الطالب ويقرر أعتبار الحالة لست رميات)

طالب : الاجابة تكون $\frac{١}{١٢}$

طالب آخر : كيف حصلت على ذلك ؟

الطالب الأول : إنها تساوى $\frac{٢}{١٦} \times \frac{٢}{١٦} \times \frac{٣}{١٦}$.

ملاحظة : (يوافق الفصل على ذلك بعد مناقشة قصيرة)

طالب : حسناً ، لدينا الآن نمط ، لنستمر فى الضرب فى $\frac{٢}{١٦}$

ملاحظة : (يوافق الفصل)

طالب : ربما نستطيع أن نكتب قانوناً . لدينا $\frac{٢}{١٦} \times \frac{٢}{١٦} \times \frac{٢}{١٦} \times$ .... لذلك القانون $(\frac{٢}{١٦})^{ن}$ $\left[\left(\frac{2}{16} \right)^n \right]$

طالب آخر : دعنا نبسّط القانون ، ليصبح $(\frac{١}{٨})^{ن}$ $\left[\left(\frac{1}{8} \right)^n \right]$

طالب آخر : ماهى ن [n] ؟

طالب آخر : ن عدد رميات قطعتى النقود .

طالب آخر : كلّا ، إنه ليس كذلك . لأن $\frac{١}{٨}$ هو احتمال لستّ رميات ، ويمكن أن ترى ذلك من الجدول .

ملاحظة : (يرسم الطالب السابق جدولًا كالآتى على السبورة) .

عدد الرميات	٢	٤	٦
احتمال الاحتباس	$(\frac{١}{٨})$	$(\frac{١}{٨})^٢$	$(\frac{١}{٨})^٣$

طالب : إذن يصبح القانون $(\frac{١}{٨})^{\frac{ن}{٢}}$ $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{2}}\right]$ حيث ن عدد الرميات .

طالب آخر : هذا صحيح ، ن يجب أن تكون عدداً زوجياً .

طالب آخر : إذن لقد وصلنا .

ملاحظة : (يوافق الفصل على أن المشكلة قد حُلَّت)

المعلم : مااحتمال عدم الخروج من داخل المثلث بعد عدد زوجي من المحاولات ؟

طالب : إنه $(\frac{١}{٨})^{ن}$ $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{2}}\right]$

المعلم : (يوجه السؤال إلى الفصل كله) هل هذا صحيح ؟

ملاحظة : (يوافق الفصل على إجابة الطالب)

المعلم : مااحتمال عدم الخروج من داخل المثلث بعد عدد فردى من المحاولات ؟

طالب : صفر

طالب آخر : كلّا ، إنه ليس كذلك

ملاحظة : (بعد مناقشة هذا السؤال ليضع دقائق يقرر الفصل أن احتمال عدم الخروج من داخل المثلث بعد (ن + ١) $[n + 1]$ من الرميات حيث ن عدد زوجي مازال $(\frac{١}{٨})^{\frac{ن}{٢}}$ $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{2}}\right]$

المعلم : إذن ما احتمال أن ينتهى التحرك عند كل من النقاط (٢ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (− ١، ١) ، (−٢ ، ٠) بعد ن أو (ن + ١) $[n + 1]$ من المحاولات ؟

points (2, 0), (1, 1), (0, 2), (−1, 1), and (−2, 0) after n or $n + 1$ trials?''

طالب : حسناً ، حيث أن احتمال عدم الخروج يتناقص باستمرار ، فإن احتمال الخروج يتزايد . لذلك فإنه يجب أن يكون دائماً أكثر بقليل من $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{١}{١٦}$ لكل حالة .

طالب آخر : اعتقد أن هذه الأعداد الجديدة يجب أن تتناسب مع $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، $\frac{١}{١٦}$ كل مرة .

ملاحظة : (بعد خمس دقائق من المناقشة مازال الفصل لم يتفق على الاجابة على سؤال المعلم)

المعلم : حسناً ، يبدو أنه الأمر أصعب من ايجاد القانون السابق ، دعنا نفكر فى الأمر حتى الغد . ولنفكر الآن فى الاستراتيجيات التى أُستخدِمت حتى وصلنا إلى ما نحن عليه الآن فى هذه المشكلة . أولًا : ماالخطوات الأربع فى الطريقة

الاستقصائية لحل المشكلات وعمل اكتشافات ؟

طالب : ايجاد مشكلة ، تجميع معلومات ، حل المشكلة والنظر فى الطرق التى استخدمت .

المعلـــم : حسناً ، كيف أوجدتم المشكلة ؟

طالب : انت الذى قدمتها لنا .

طالب آخر : ليست حقيقة ، لقد بيّنت لنا كيف نتحرك داخل المثلث ولكننا اكتشفنا المشكلة مع بداية العمل .

المعلـــم : كيف فعلتم ذلك ؟

نفس الطالب : بالقاء اسئلة ومناقشة المشكلة

طالب آخر : حسنا ، لقد قمنا بمعظم العمل بأنفسنا .

المعلـــم : هل أسلوب « السؤال والمناقشة » هذا يعد طريقة جيدة لإيجاد مشكلات للتفكير فيها ؟

ملاحظـــة : (يوافق الطلاب على ذلك)

المعلـــم : كيف قمتم بتجميع المعلومات لحل هذه المشكلة ؟

طالب : لقد أوجدناها بانفسنا .

طالب آخر : إنك لم تساعدنا ، فقد ناقشنا الأشياء بأنفسنا ورأينا لأنفسنا الخطوات التالية .

المعلـــم : هل هذه طريقة جيدة لإنماء طرق لحل المشكلات ؟

طالب : إنها تستغرق وقتاً أطول مما لو كنت قد اخبرتنا بالحل ، ولكنه عمل أكثر متعة .

ملاحظـــة : (يوافق الفصل على هذه الملاحظة)

المعلـــم : إذن لقد وجدتم مشكلاتكم بأن سألتم أسئلة وحصلتم على بيانات عن طريق مناقشة الأساليب واكتشاف الأشياء بأنفسكم . ولكن كيف أجبتم على أسئلتكم وحللتم مشكلاتكم ؟

طالب : لقد فعلنا ذلك بأنفسنا .

طالب آخر : حسناً ، لقد ناقشنا الأشياء ، عرضتنا أخطاءنا وشرحنا أفكارنا لبعضنا البعض .

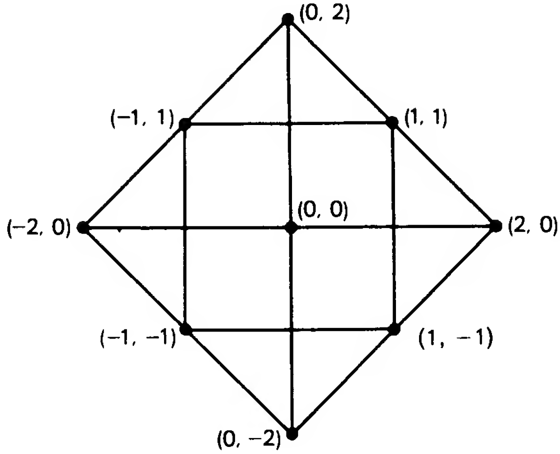
المعلـــم : مالطرق العامة للإستقصاء التى أستخدمتوها فى هذا الدرس ؟

طالب : سألنا اسئلة ، اكتشفنا أشياء بأنفسنا وتناقشنا مع بعضنا البعض .

طالب آخر : بحثنا عن أنماط ، وحاولنا أن نثبت صحة ماكنا نتوصل إليه .

المعلـــم : حسناً ، كل هذه مداخل جيدة لحل المشكلات . إذا كان لديكم وقت لحين الحصة المقبلة للرياضيات غداً ، فابحثوا ما إذا كان بامكانكم إيجاد إحتمالات إنتهاء التحركات عند كل نقطة على ساق المثلث بعد عدد معين من المحاولات قد ترغبون فى محاولة الحل لقيم ن = ٣، ٤، ٥، ٦،... [$n = 3,4,5,6, \ldots$] كحالات خاصة ، ثم قد تجدون قانوناً . وعلى أية حالة أحضروا

معكم تخميناتكم وماتوصلتم اليه ، وسوف نرى النتيجة التى قد نصل إليها من كل ذلك . قد يعتبر بعضكم الموقف فى حالة مايكون الوضع كما بالشكل (٤ - ٩) :



(عند هذه النقطة يجب على المعلم أن يرسم الشكل على السبورة) يمكنكم استخدام (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) [(H, H), (H, T), (T, H), and (T, T)] لتحديد ما إذا كان التحرك يجب أن يسير إلى أعلى أو إلى أسفل أو إلى اليسار أو إلى اليمين بعد البداية عند النقطة (٠ ، ٠) . وقد ترغبون فى استخدام قطعتى نقود مختلفتين حتى يمكنكم التمييز بين (ص ، ك) ، (ك ، ص) [(H, T)،(T, H).]

التقويم البَعْدى :

يمكن أن يتم التقويم البعدى لهذا الدرس ولغيره من دروس الاستقصاء جزئياً عن طريق ملاحظة المعلم لأنشطة الطلاب أثناء الحصة . هل شارك كل الطلاب فى الدرس ؟ هل أعتمد الطلاب على مصادرهم الخاصة بهم للحصول على المعلومات أو هل أعتمدوا على المعلم ؟ هل سأل الطلاب أسئلة وقدموا مشكلات من عندهم ؟ هل استخدم الطلاب طرقاً جيدة للاستقصاء ؟ ماذا تعلّم الفصل عن عملية الاستقصاء ؟ هل أمكن للمعلم أن يحدد ماإذا كان الطلاب يقدّرون عملية الاستقصاء كوسيلة لتكوين وحل مسائل مثيرة ؟ إن نجاح الطلاب فى القيام بالواجبات المنزلية التى تُعطى لهم يمثل مؤشراً لمدى تحقق الأهداف المعرفية والوجدانية للتعلم أثناء الدرس . ماذا تعلّم الطلاب عن العمليات العشوائية وماذا كانت اتجاهاتهم نحو الاجراءات التى استخدِمت فى هذا الدرس ؟

نموذج العمليات الجماعية للتعليم والتعلم

إن قدراً كبيراً من التعليم فى حصص الرياضيات يكون موجهاً نحو مجموعة من الطلاب ، وفى معظم الحالات تكون المجموعة هى الفصل كله . وحتى عندما لايستخدم المعلم نموذج العرض الإلقائى المباشر لتدريس الرياضيات لمجموعة كبيرة فإن الطلاب قد يعملون معاً فى مجموعات من أحجام مختلفة . وبالرغم من أن نماذج الألعاب وحل المشكلات والبرهنة النظرية والمعمل والاكتشاف والاستقصاء للتعليم والتعلم تتطلب أنواعاً مختلفة من توجيهات المعلم وتدخله أثناء الدرس ، إلا أنها تتطلب أيضاً أنواعاً مختلفة من التفاعل الجماعى من طالب لآخر .

وبصفة عامة ، يعتبر نموذج العمليات الجماعية للتعليم والتعلم محاولة لتنظيم الفصل فى مواقف ديمقراطية وظيفية مصغرة . ولكى يحدث تقدم فعّال وهادىء فى موقف التعلم الجماعى لابد وأن يعمل الطالب بالرجوع إلى زملائه الطلاب . فكل طالب يكتسب خبرات رياضية من خلال اسهامه فى بناء وتكييف المناقشات الاجتماعية والاتفاقات والاختلافات . وكما يقول « جويس ، ويل » Joyce lWeil فى كتابهما الصادر عام ١٩٧٣ :

يناظر الفصل الدراسى المجتمع الأكبر ، فيكون له نظامه الاجتماعى وثقافته ومراعاة طلابه لطرق الحياة التى تنمو داخله ، أى تلك المعايير والتوقعات التى تصبح قائمة فى الفصل . وينبغى أن تتجه الاجراءات التربوية إلى استخدام الطاقة المتولدة . بطريقة طبيعية عن طريق الاهتمام بخلق نظام اجتماعى . ويعتبر نموذج (البحث الجماعى) للتعليم نسخة من نمط التفاوض فى المجتمع . وخلال التفاوض يتعلم الطلاب المجالات الأكاديمية للمعرفة ، وفى النهاية يندمجون فى حل المشكلات الاجتماعية .

أهداف نموذج العمليات الجماعية

يتضح من الاقتباس السابق أن أهداف استخدام نموذج العمليات الجماعية هو التطبيع الاجتماعى للطلاب ، أى مساعدتهم على الاندماج فى أنشطة مناسبة لحاجات المجموعة أو المجتمع ككل . هدف رئيسى لاستخدام هذا النموذج فى تعليم وتعلم الرياضيات هو - بطبيعة الحال - تيسير تمكن الطلاب من الحقائق والمهارات والمفاهيم والمبادىء الرياضية فعندما يتعلم الطلاب الخبرات الرياضية من خلال أنشطة جماعية فإنهم يتعلمون أيضاً شيئاً عن العملية الاجتماعية التى تنمو وتُنظَم بواسطتها الرياضيات . كما أن تعلم كيفية التعلم بفاعلية كجزء من جماعة يساعد الطلاب على تعلّم الطرق التى تنمو بواسطتها الرياضيات .

باستثناء النموذج التفريدى للتعليم والتعلم فإن كل النماذج الأخرى التى سبق مناقشتها لها أهداف تعلّم معرفية يمكن تحقيقها من خلال النموذج الجماعى . وفى الواقع فإن الأنشطة الجماعية لاتساعد الطلاب على معرفه وفهم الحقائق والمهارات فحسب ، ولكنها تقود إلى تحليل وتركيب وتقويم المفاهيم

والمبادىء . ولعل نموذج العمليات الجماعية أكثر تميزاً فى تأكيده على الأهداف الوجدانية للاستجابة ، وتفضيل القيم وإدراكها ، وتنظيم النظم القيمية ويعتقد « سنانفورد ، ستانفورد » (١٩٦٩) أن المناقشات التابعة من أنشطة التعلم الجماعية تسعى إلى تحقيق الأهداف التالية :

حل المشكلات ، عرض الآراء بصراحة ، التعرف على تفكير الآخرين ، التنفيس عن المشاعر ، توضيح وجهة نظر الشخص (للآخرين) إعادة تقييم الفرد لآرائه واكتساب مشاعر القبول والانتماء .

سمات نموذج العمليات الجماعية

مناقشات داخل الفصل :

يتمركز هذا النموذج حول مناقشات الطلاب ، وهناك أنواع عديدة من المناقشات التى تدور داخل الفصل ، والتى يمكن التمييز بينها بمدى تدخل المعلم فيها . النوع الأول من المناقشات هو الذى يسيطر عليه المعلم ، حيث يوجه أسئلة لطالب معين أو للفصل ككل لتحديد ماإذا كان الطلاب قد حققوا أهداف تعلم معينة أو أكملوا واجباتهم المنزلية أو استعدوا للإنتقال إلى موضوع رياضى جديد . وعلى الرغم من أن هذا النوع من المناقشات يكون مركزه المعلم إلا أنه يسمح للمعلم أن يُقيّم مدى تمكن طلابه من المحتوى الرياضى كما تتيح للطلاب فرصة مراجعة المحتوى الذى درسوه .

وهناك نوع ثان من المناقشات وهو أيضا تحت السيطرة النسبية للمعلم وهى الحوار الارشادى للاكتشاف . والهدف الرئيسى هنا ليس تحديد مدى تمكن الطلاب ممّا درسوه ولكن إرشادهم نحو اكتشاف علاقات رياضية . وعلى الرغم من أن المعلم يسأل معظم الأسئلة عادة ويتحكم فى توجيه المناقشة ، إلّا أنه يوجد تفاعل من طالب لآخر أكثر من النوع الأول للمناقشة ، ومع ذلك يوجد فى هذا النوع خبرة رياضية قابلة للاكتشاف ، ويقوم المعلم بتنظيم المناقشة بعناية وتوجيهها نحو تلك الخبرة . وتتضمن مناقشات الاكتشاف الارشادى عادة صيغاً للتعليل الاستقرائى يُشجع الطلاب من خلالها على استنتاج تعميمات عن طريق ملاحظة ومناقشة أمثلة خاصة لكل مبدأ عام .

النوع الثالث لمناقشات الفصل عبارة عن حوار موجه نحو حل مشكلة يقدمها المعلم ، فبعد أن يعرض المعلم المشكلة يحدث فى المعتاد توازن فى المناقشة بين الطلاب وبين تحكم وضبط المعلم لأنشطة وطرق التفكير فى الحل . وبالرغم من أنه عند فحص مشكلة معينة قد تُستخدم كل من استراتيجتى الاستقراء والاستنباط إلا أن المعلم قد يقترح مدخلًا محدداً ليستخدمه الطلاب . ويستخدم عدد كبير من معلمى الرياضيات هذا النوع من المناقشات عند تدريس حل المشكلات الكلامية وبرهنة النظريات .

أما النوع الرابع من المناقشات الفصلية والذى قد يُستخدَم أيضا فى حل مشكلة فهو المناقشة ذات الصبغة الاستقصائية والتى يلعب فيها الطلاب دوراً نشطاً فى صياغة المشكلة المدروسة وفى سيطرتهم

على محتوى واتجاه المناقشة . ويتمركز هذا النوع من المناقشة حول الطالب حيث ينحصر دور المعلم فى التيسير أو التبسيط ولايمثل مصدراً للإجابات ولاللحكم على صحة أو خطأ أو صلاحية أو عدم صلاحية المواقف التى يتعرض لها الطالب .

من الممكن استخدام كل من الأنواع الأربعة من المناقشات لتحقيق أهداف تعلم الرياضيات ، ومع ذلك فإنه من المهم أن يضع المعلمون أهدافاً لكل نوع من المناقشات . فإذا كان هدف المناقشة فى الفصل هو اختبار درجة تمكن الطلاب من موضوع تمّ تدريسه ، فإن المناقشة ذات الصيغة الاستقصائية لاتكون مناسبة . وكذلك الحوار الذى يسيطر عليه المعلم لايكون مناسباً لتعليم الطلاب العمليات الاستقصائية الاستقلالية للإكتشاف وحل المشكلات العامة فى الرياضيات .

مراحل نموذج العمليات الجماعية

مراحل هذا النموذج تماثل مراحل نماذج الاستقصاء وحل المشكلات . والمراحل الأربع لنموذج العمليات الجماعية هى : (١) موقف يتمكن الطلاب فيه من الاستجابة والمناقشة كمجموعة . (٢) تشخيص جماعى الموقف يمكّن الطلاب من فهم الموقف واعتبار مداخل بديلة . (٣) مناقشة جماعية لصياغة مداخل للمشكلة واختيار الفروض وتقويم وتعديل الاجراءات وتجريب الخطط وملاحظة نتائج الأنشطة المختلفة . (٤) تأمل جماعى للاستراتيجيات والأهداف ونتائج الخطوات الثلاث السابقة . وهذه المراحل هى نفس المراحل والخطوات السابق شرحها فى نموذج الاستقصاء وحل المشكلات .

تعليم الطلاب العمل فى جماعات

من المعروف أن البعض لديهم كفاءة عالية فى النشاط الجماعى بينما هناك آخرون لايمتلكون هذه الكفاءة . وكثيراً مانسمع عبارات مثل : « حقا إنه لاعب فريق » أو انه « انعزالى » ، وفى الفصل نجد طلاباً يسيطرون على المناقشات والأنشطة الجماعية بينما البعض الآخر يأخذ دوراً ضيئلاً بل دوراً لايذُكر فى العمليات الجماعية . ويحتاج كثير من الطلاب ارشاداً لكيفية المشاركة فى أنشطة الفصل الجماعية ، وينبغى أن يدير المعلمون هذا العمل بدقة وبدون تطفل حتى يتمكن كل طالب أن يلعب دوراً من خلال الجماعة ، وتعنى الجماعة مكانا يتعلم فيه الطلاب الخبرات الرياضية من خلال أنشطة الاستقصاء وحل المشكلات كما تعنى موقفاً يجب أن يتعامل فيه الطلاب مع صراعات كامنة بين رغباتهم الشخصية والأهداف الاجتماعية للجماعة . بعض الطلاب قد يحقق التوازن بين حاجاتهم العاطفية والأهداف الاجتماعية للجماعة . التوازن بين حاجاتهم العاطفية والبعض الآخر قد يحاول فرض رغباتهم الشخصية على الجماعة ، بينما البعض الآخر قد يشردون ذهنياً بعيداً عن الجماعة برفضهم المشاركة فى أنشطتها .

يعيش الكثير من طلاب المرحلة الثانوية رغبات ودوافع واحباطات اجتماعية تحجب أمورا أكاديمية مثل تعلم الرياضيات . وعندما يدير المعلم عملية التعلم الجماعى وينسقه بطريقة صحيحة فإن الموقف الاجتماعى للأنشطةالجماعية فى حصة الرياضيات يساعد الطلاب فى حل تلك الصراعات بين حاجاتهم الاجتماعية الفورية وبين الأهداف الأكاديمية بعيدة المدى . إذ يمكن أن يمثل الاندماج الإجتماعى فى انشطة التعلم الجماعى وسيلة لتنمية الاستقصاء الرياضى المنظم فى موقف اجتماعى مريح .

سواء عمل الطلاب فى مجموعات مع الحد الأدنى من توجيهات المعلم أو تفاعلوا مع المعلم فى موقف جماعى ، فإنه ينبغى أن تكون المجموعات صغيرة بالدرجة الكافية التى تشجع المشاركة النشطة من كل الطلاب ، وأن تكون كبيرة بالدرجة التى توفر تنوعاً من الأفكار . وقد وجد أنه إذا قلت المجموعات عن خمسة أفراد فإن الطلاب يعملون ببطء وبدون فعالية ، وإذا زادت عن خمسة عشر فرداً فإن العديد من الطلاب يفشلون فى المشاركة فى أنشطة الجماعة . ويشير هذا إلى أن الحجم الأوفق لمجموعة المناقشة فى الفصل أو المعمل فى حصة الرياضيات هو (١٠ ± ٥) غير أن هذا لايعنى أنه لايمكن أتمام أنشطة معلمية معينة مع مجموعات أقل من خمسة أفراد ، كما لايعنى أنه لايمكن أن تجرى أنشطة جماعية مع فصل كامل حجمه بين ٢٠ ، ٤٠ طالباً ويحتاج الأمر فى مثل هذه الحالات أن يتداخل المعلم مراراً وأن يوفر ارشادات وتعليمات اضافية . وعندما ينسق المعلم أنشطة مجموعة كبيرة عليه أن يُعطى عناية خاصة لضمآن مشاركة كل طالب فى الدرس ، وقد يكون من اللازم أن يلقى أسئلة لغير المشاركين وأن يقترح لهم أنشطة أو أن يوجه لهم مباشرة بعض التوضيحات والشرح ، ويجب ألا يعاقب أو يزجر أو يسخر من الطلاب الذين يترددون فى المشاركة فى الأنشطة الجماعية حتى لايزيد ذلك من ترددهم ومن الممكن دفع الطلاب إلى المشاركة مع الجماعة وزيادة عددها من خلال تشجيعهم وإثابتهم عن مبادآتهم وجهودهم القليلة فى الاندماج فى العمل الجماعى .

إن دور المعلم فى النشاط الجماعى ليس دور المدير أو الخبير المقيم الذى يوجه أو يصدر احكاماً على كل نشاط أو نتيجة ، وإنما دور المعلم قد يكون دور المشرف أو المستشار أو موجه الاسئلة أو الناقد الودود البناء . وينبغى أن يأخذ المعلم دوراً نشطاً فى تنظيم عمل الجماعة والعمل على أن تبدأ المناقشات والأنشطة . طالما يبدأ العمل الجماعى يكون على المعلم عدم التدخل مالم تكن هناك ضرورة ملحة من أجل تقدم العمل الجماعى أو دفع بعض الأفراد للمشاركة . والمواقف التى قد يكون تدخل المعلم فيها ضرورياً هى : (١) الحالات التى يسيطر فيها أفراد قلائل على الجماعة . (٢) الحالات التى ينعزل فيها بعض الأفراد عن المشاركة . (٣) الحالات التى تعجز المجموعة فيها تماماً عن التقدم (٤) الحالات التى تخلق فيها الجماعة موقفاً فوضوياً أو خارجاً عن المألوف . (٥) المواقف التى لا تؤدى الاستراتيجيات التى استخدمها الطلاب إلى نجاحات (٦) الأنشطة التى تتعامل فيها المجموعة بادوات معملية أو رموز رياضية دون فهم واع للمفاهيم والمبادىء الرياضية المتضمنة بها . (٧) الحالات التى

يتضح قصور اعضاء المجموعة فيها عن امتلاك المتطلبات المسبقة لانجاز المهمة الرياضية موضع الدراسة .

قد لايعمل الطلاب مباشرة معاً وبكفاءة فى مجموعات ، وقد يحتاجون إلى أن يتعلموا مهارات خاصة للعمل الجماعى . وسوف نتعرض إلى بعض أساليب تدريس الطلاب بعض المهارات المتطلبة للعمل الجماعى وإلى طرق التعامل مع المشكلات التى قد تنشأ من دراسة الطلاب للرياضيات جماعياً .

بعد أن تعطى مشكلة لمجموعة كبيرة أو لمجموعات صغيرة من الطلاب لحلها ، أو يُعطى لهم موقف لبحثه فإنه من الضرورى أن تنظم كل مجموعة نفسها مما قد يتطلب مساعدة المعلم . وقد ترغب المجموعة فى أن تختارها منسّقاً ليرشد انشطتها ويفصل فى منازعاتها أو قد تحتاج إلى شخص يسجل البيانات التى تجمعها ويدون ملاحظات عن تقدمها . كما ينبغى على المجموعة أن تضع ارشادات لنشاطاتها . وقد تكون هذه خطة مؤقتة لمعالجة مشكلة أو نشاط أو مجموعة من القواعد تحدد درجة وطبيعة الاسهامات المتوقعة من كل فرد من أفراد المجموعة . ويجب أن يُسمَح للمجموعة أن تخطط نشاطاتها الخاصة وتحدد نمطها فى التنظيم ، ومع ذلك يجب على المعلم أن يلاحظ كل مجموعة ليتأكد من أن هناك نوع من التنظيم الأولىّ قد تم الاتفاق عليه بين أفراد المجموعة . وعلى المعلم أن يتدخل فى حالة ماإذا واجهت المجموعة صعوبة فى أن تبدأ ، وذلك لدفعها لكى تبدأ نشاطها .

ولما كان جزء كبير من تدريس الرياضيات مركزه المعلم ، فإن الطلاب يميلون إلى النظر للمعلم على أنه المصدر الرئيسى للمعلومات الهامة وقد لايثقون فى اقتراحات واسهامات الطلاب لبعضهم فى المجموعة المتمركزة حول الطلاب . وعندما يتعلم الطلاب كيفية العمل جماعيا مع الحد الأدنى من المساعدة من المعلم فإنه يمكن أن يبين لهم كيفية أن يهتموا بتعليقات بعضهم للبعض وكيفية تقدير اقتراحات الطلاب أنفسهم فى حل المشكلات التى يقدمها المعلم . ويعرض كتاب « ستانفورد ، ستانفورد » المعنون « تعلّم مهارات المناقشة من خلال الألعاب » المثال التالى عن قصة بوليسية وهمية عن حادث سرقة يحاول الفصل وعدده ٣١ طالباً فك أسرارها :

فى احدى الليالى المظلمة الكئيبة تعرض « البنك القومى » فى مدينة سلدوم لحادث سرقة ، وبعد التحقيقات المكثفة توصل البوليس إلى المعلومات التالية :

١ – اكتشفت الآنسة « نقدية » إحدى موظفات البنك حادث السرقة .
٢ – أكتشفت السرقة الساعة التاسعة صباحاً من يوم الجمعة ١٢ ديسمبر عند فتح البنك .
٣ – كان البنك قد أغلق أبوابه الساعة الرابعة من مساء الخميس ١١ ديسمبر .
٤ – حُطِّمت أقفال خزينة البنك بواسطة متفجرات بلاستيكية .
٥ – لم يمكن العثور على مكان السيد سكورج مدير البنك وقت اكتشاف السرقة .
٦ – تمكنت السلطات من التقاط السيد سكورج وهو فى مطار مدينة مكسيكو فى الساعة الواحدة بعد ظهر يوم الجمعة ١٢ ديسمبر .

٧ – عند اعتقاله أفاد السيد سكورج أنه كان ينوى الابتعاد عن زوجته لأنها كادت تعرضه للإفلاس .
٨ – كان السيد سكورج هو الشخص الوحيد الذى يحتفظ بمفتاح للخزينة .
٩ – أفاد سكورج أنه كان فى مطار شيكاغو لمدة ١٢ ساعة نظراً لوجود عاصفة ثلجية وذلك قبل أن يصل إلى مطار مكسيكو .
١٠ – كان لسكورج ابن عم يدعى لاسن وكان حقوداً جداً على سكورج .
١١ – اعتاد لاسن السكر الشديد فى ليالى الجُمَع .
١٢ – ظهر لاسن فى مدينة شيكاغو يوم الاثنين ١٥ ديسمبر وفى حوزته كمية نقود كبيرة .
١٣ – لم يمكن العثور على السيدة سالى زوجه لاسن .
١٤ – فتح اللص أو اللصوص الباب الخارجى للبنك بواسطة مفتاح .
١٥ – الشخصان الوحيدان اللذان يحتفظان بمفاتيح الباب الخارجى للبنك هما مدير البنك (السيد سكورج) والحارس واسمه السيد « مفتاح » .
١٦ – لم يتمكن البوليس المحلى من التعرف على مكان السيد مفتاح .
١٧ – تمكن البوليس الفيدرالى أخيراً من القبض على مفتاح فى مدينة « هايد » بفرجينيا .
١٨ – أفاد مفتاح بأنه وصل إلى مدينة هايد على طائرة تجارية فى الساعة الرابعة بعد ظهر الخميس ١١ ديسمبر .
١٩ – أكد موظفو شركة الطيران صحة موعد وصول مفتاح إلى مدينة هايد
٢٠ – لم يكن هناك طائرات تغادر مدينة هايد بين الساعة ٣ بعد الظهر ، ٩ صباح اليوم التالى
٢١ – كان لمفتاح أخ يعتبر من ملوك البترول فى ألاسكا
٢٢ – أفادت الآنسة نقدية (موظفة البنك) أن السيد مفتاح حاول مغازلتها فى البنك
٢٣ – اعتادت الآنسة نقدية أن تستعير مفتاح الباب الخارجى للبنك من المدير حتى تتمكن من الحضور إلى البنك مبكرة
٢٤ – أفاد السيد سكورج أن الآنسة نقدية استعارت مفتاح الباب الخارجى منه قبل وقت إقفال البنك يوم الخميس ١١ديسمبر
٢٥ – انكرت الآنسة نقدية أنها استعارت المفتاح من سكورج فى ذلك اليوم
٢٦ – أكتشف سرقة بعض المتفجرات البلاستيكية من شركة المقاولات الرملية يوم الأربعاء ١٠ ديسمبر
٢٧ – أبلغ السيد هنرى أحد موظفى شركة المقاولات أنه شاهد السيد مفتاح يتسكع حول الشركة بعد ظهر يوم الأربعاء ١٠ ديسمبر
٢٨ – أفادت الآنسة نقدية أنها شاهدت السيد مفتاح يتسكع حول البنك يوم الخميس ١١ ديسمبر
٢٩ – أفادت الآنسة نقدية أنها شاهدت السيد مفتاح يغادر البنك الساعة الحادية عشر من مساء الخميس ١١ ديسمبر وذلك أثناء جلوسها بمقهى بالشارع المقابل للبنك

٣٠ - شهدت الآنسة نقدية والسيد هنرى أنهما يعتقدان أن السيد مفتاح سرق البنك
٣١ - تأكد البوليس من قصة السيد سكورج مدير البنك فيما يتعلق بتأخره فى شيكاغو .

ويعطى ستانفورد التعليمات التالية للمعلم :

- أكتب كلاً من البيانات المرشدة السابقة على ورقة منفصلة
- وزع جميع البيانات على الطلاب بحيث يحصل كل طالب على بيان واحد على الأقل .
- لايعطى الطلاب أية بيانات ارشادية إضافية .
- كل طالب يحتفظ ببيانه ولكنه يمكن أن يقرأها على الآخرين .
- أخبر الطلاب أن يشاركوا ببياناتهم الارشادية مع بقية الفصل عن طريق قراءتها بصوت مرتفع عندما يرغبون فى ذلك ويحاولون كشف سر هذه السرقة من خلال مناقشة البيانات الارشادية .
- اسمح للطلاب بقراءة بياناتهم للفصل فى أى وقت ولكن لاتسمح بكتابة قائمة البيانات على السبورة .

بهذه الطريقة يكون كل طالب ملزماً بالاشتراك فى المناقشة الجماعية والمساهمة بمعلومته الارشادية . كما أن الفصل سيرى أهمية مشاركة كل طالب فى فك أسرار هذه القضية .

ولابد أن يستنتج الفصل أن كلاً من الآنسة نقدية (موظفة البنك) والسيد هنرى (موظف شركة المقاولات) تآمرا معاً لسرقة البنك وحاولا إلصاق التهمة بالسيد مفتاح (حارس البنك) والذى كان فعلاً خارج مدينة سلدوم وقت وقوع الحادث . وهذا مالم يكن المتآمران يعلمان به ، كذلك كان السيد سكورج (مدير البنك) خارج المدينة وقت وقوع الحادث .

يوضح هذا الدرس قيمة مساهمة كل طالب فى مناقشة جماعية لحل مشكلة . ويمكن أن يلى هذا الدرس مناقشة جماعية قصيرة عن « أسرار رياضية » كما فى المثال التالى الذى يهدف إلى التعرف على اسم (معادلة) دالة غامضة :

دالة رياضية تسللت هاربة من احداثيات كارتيزية ، وإليك المعلومات المفتاحية التالية عن شكلها البيانى :

١ - تركت أثراً واحداً على الأقل فى كل ربع دخلت اليه .
٢ - مرت بالنقطة (١ ، ٣)
٣ - لم يوجد لها أى أثر فى الربع الثالث .
٤ - أخترقت المحور الصادى عند ص = ١ [$y = 1$]
٥ - كانت تتحرك دائما محمولة على قطع مستقيمة .
٦ - مرت بالنقطة (- ٢ ، ٥)
٧ - غيرت اتجاهها مرة واحدة فقط .

٨ – لم يوجد لها أثر فى الربع الرابع .
٩ – لم تقطع المحور السينى أبداً .
١٠ – كانت على بعد « الوحدة » من محور السينات
١١ –مرت بالنقطة (٣ ، ٧)
١٢ – مرت بالنقطة (– ٤ ، ٩)
١٣ – بدأت من المالانهايه فى الربع الثانى
١٤ – أنتهت المالانهاية فى الربع الأول .
١٥ – نقطة نهايتها الصغرى كانت س = صفر $[(x = 0)]$
١٦ – تتضمن حداً ثابتا هو الواحد الصحيح .

(ملاحظة : اسم هذه الدالة هو ص = ٢ س + ١ $[y = 2|x| + 1]$

ويمكن لمعلم الرياضيات أن يؤلف العديد من « الغامضات » الرياضية مثل هذه ، ويترك للطلاب حل غموضها بالعمل فى مجموعات صغيرة أو فى الفصل ككل . وقد يستمتع الطلاب أيضاً بأن يؤلفوا بأنفسهم أحاجي وقضايا غامضة وهم يعملون فى مجموعات صغيرة ثم يتبادلون مؤلفاتهم للحل وكشف الغموض . وتتنوع هذه الغامضات فى الفرع المختلفة مثل خمنّ عدداً بحيث كذا وكذا ... أو خمنّ متطابقة مثلثية بحيث صفاتها كذا وكذا ... أو خمنّ نظرية هندسية بحيث .... الخ . ومثل هذه الأنشطة مناسبة لتحقيق أهداف تعلم الرياضيات المعرفية والوحدانية ولتوفير مشكلات مثيرة وممتعة لحصص حل المشكلات فى مجموعات صغيرة أو كبيرة .

وبالاضافة إلى مسئولية الطلاب عن المساهمة فى المناقشة الجماعية والانتباه إلى مايقوله زملاؤهم ، فإن عليهم أيضاً أن يتعلموا ويحللوا ويقوّموا ويستجيبوا لأفكار الطلاب الآخرين وأن يوفقوا بين النتائج التى يتم التوصل إليها من المناقشات الجماعية فى مجموعات موحدة من المفاهيم والمبادىء . وعلى المعلم أن يتابع هذه المناقشات الجماعية ويحول دون سلبية بعض الطلاب أو عدوانيتهم وعدم متابعة بعضهم لبعض من خلال توجيه اسئلة قيادية مناسبة .

وعند العمل فى جماعات ينبغى على الطلاب أن يتعلموا الاستفادة من أفكار كل فرد فى المجموعة وأن يلخصوها ويكوّنوا منها نتائج منتظمة فى تركيب مفيد ، ويفضل تعيين مسجل لكل مجموعة يلخص أفكار الأفراد ويوائم بينها من خلال تساؤلات تدعو إلى تحديد النتائج وتنظيمها والتخطيط للعمل القادم وبحث جوانب الاتفاق والاختلاف وبحث مداخل جديدة وبديلة ...

ويلعب الأفراد أدواراً مختلفة فى النشاط الجماعى . ففى البداية يمكن لبعض الطلاب أخذ المبادأة فى المناقشة وعرض المشكلات ، والبعض الآخر قد يكون دوره طلب مزيد من المعلومات أو تحدى أفكار الآخرين ، والبعض قد يقوم بتلخيص مادار من مناقشات ويعرض ماتم وماتبقى من عمل ...... وهكذا .

من بين الألعاب الجماعية الشهيرة اللعبة المعروفة بأسم « تصادم على سطح القمر » فى هذه اللعبة يُفترض أن طاقماً من رواد مكوك الفضاء قد تحدد له موعداً ليتقابل فيه مع معمل الفضاء على سطح الجانب المضىء من القمر . ويسبب صعوبات فنية اضطر المكوك للهبوط فى موقع يبعد ٢٠٠ ميلا تقريباً من معمل الفضاء . وأثناء الهبوط الاضطرارى للمكوك تحطمت معظم أجهزة وتموينات المكوك . يتوقف بقاؤك وبقية طاقم رواد المكوك على الوصول إلى معمل الفضاء بدون معاونة خارجية ، وفيما يلى قائمة بخمس عشرة مفردة سليمة تم انقاذها بعد الهبوط الاضطرارى . وعلى مجموعة الرواد الآن أن يتناقشوا فى ترتيب كل من هذه المفردات طبقاً لأهميتها فى مساعدتهم للوصول إلى معمل الفضاء . ضع رقم ١ أمام المفردة الأكثر أهمية ثم رقم ٢ أمام المفردة التى تليها فى الأهمية ... وهكذا .

- علبة كبريت عادية
- خبز جاف مركز
- حبل نايلون طوله ٥٠ م .
- قطعة حرير من براشوت .
- وحدة تسخين سهلة الحمل .
- بندقيتا يد من عيار ٤٥ .
- كيس من لبن البودرة .
- خزانان كبيران من الأوكسوجين .
- خريطة نجمية لكوكب القمر .
- رافدة نجاة قابلة للنفخ .
- بوصلة مغناطيسية .
- صندوق اشارات ضوئية .
- حقيبة اسعافات أولية .
- مرسل ومستقبل F M يعمل بالطاقة الشمسية .
- خمسة جالونات ماء .

وقد تحتاج مجموعة من طلاب المرحلة الثانوية إلى حصة كاملة للمناقشة الجماعية حتى يصلوا إلى اتفاق على ترتيب المفردات السابقة . وأثناء مناقشة هذه المشكلة ينبغى عليهم أن يحاولوا تحليل وتقييم العمليات الجماعية التى يستخدمونها ، وعلى المعلم أن يتفادى تقديم مقترحات أو اجابات عن أسئلة ، أو المشاركة فى مناقشات الفصل بأية طريقة . ومع ذلك يجب على المعلم أن يضع قائمة بملاحظات تصف الأنشطة والعمليات الجماعية التى ينشغل بها الطلاب أثناء المناقشة . وفى اجتماعات الفصل التى تلى « لعبة القمر » يمكن استخدام هذه الملاحظات كمنشط للمناقشات الجماعية .

يمكن اعطاء درجة على الترتيب الذى توصلوا إلية للمفردات السابقة ، وذلك بأخذ مجموع القيم

العددية للفروق بين رتبة المجموعة للمفردة والرتبة الصحيحة لها . والرتب الصحيحة للمفردات بحسب آراء خبراء سفن الفضاء هى كلآتى :

المفردة	الرتبة	
علبة الكبريت	١٥	لا فائدة لها على سطح القمر .
الطعام المجفف	٤	قد يحتاجون إليه للبقاء على قيد الحياة .
الحبل النايلون	٦	مفيد فى الإقامة معاً والتسلق
حرير البراشوت	٨	للوقاية من أشعة الشمس
سخان سهل الحمل	١٣	مفيد فقط فى حالة الهبوط على السطح المظلم للقمر .
بنادق اليد	١١	يمكن أن تتحول إلى أجهزة تسيير ذاتى للإستخدام على القمر
بودرة اللبن	١٢	يمكن أن تستخدم للتغذية
أوكسوجين	١	مطلوب للبقاء على قيد الحياة
الخريطة النجمية	٣	الوسيلة الرئيسية لمعرفة الإتجاهات
رافدة النجاة	٩	يمكن استخدام خراطيش ثانى أكسيد الكربون للتسيير الذاتى لعبور الشقوق والتصدعات ويمكن تحميل المفردات الأخرى فى الرافدة لنقلها
البوصلة المغناطيسية	١٤	قليلة إن لم تكن عديمة الفائدة على سطح القمر
الإرشادات الضوئية	١٠	يمكن استخدامها كاشارات الوقوع فى خطر
حقيبة الإسعافات الأولية	٧	الأدوية لها قيمة لحالات المرض والإصابة
مرسل FM	٥	لإمكان الإتصال بمحطة فضاء .
ماء	٢	ضرورى للبقاء على قيد الحياة للتعويض عن السوائل التى تفقد من الجسم بسبب التنفس

ويمكن للمعلم أن يؤلف مواقف مختلفة بمفردات متنوعة ليتم ترتيبها حسب الحجم أو الأهمية (مثل الاكتشافات الرياضية عبر التاريخ) . ويمكن تعديل هذه اللعبة مع بعض الإطالة لتتضمن أهدافاً معرفية فى الرياضيات وأهدافا خاصة بالعمليات الجماعية .

المشكلات الخاصة التى تعترض الأنشطة الجماعية

دور المعلم فى المجموعة :

لعل أهم وظيفة للمعلم أثناء التدريس من خلال مجموعات صغيرة هو أن يلاحظ أنشطة كل مجموعة ومدى تقدمها ويجعل الطلاب على دراية بمواطن الضعف والقوة فيما يقومون به من إجراءات . وقد يكون من المفيد أحياناً أن يتدخل المعلم ويساعد الطلاب فى تقيم مدى تقدمهم فى

العمل كمجموعة ، ويمكن للمعلم أن يساعد مجموعة فى تقييم مدى تقدم افرادها نحو تحقيق الأهداف والاسهامات التى يقوم بها كل منهم والمشكلات الخاصة التى قد تنشأ من المواجهة بينهم . كما قد يرغب بعض الطلاب فى تسجيل شريط صوتى لمناقشات الجماعة مما قد يساعدهم فى استرجاع المناقشات بقصد تحليل وتقييم مدى فعالية الأنشطة . ويكون دور المعلم هنا هو دور المرشد والميسّر وليس دور مدير المجموعة أو مصدر معلوماتها .

المجاملات والصراعات داخل المجموعة :

قد تستقطب المجموعة احياناً إلى قسمين متعارضين يحاول كل منهما أن يفرض إرادته على الآخر ، وبدلًا من أن يكون الموقف هو نشاط رياضى يُجرى بعقلانيه وموضوعية فإن التنافس قد يحيل الموقف إلى معركة للسيطرة على أعضاء المجموعة . فعندما يريد أحد الطلاب فى المجموعة أن يفرض ارادته على بقية المجموعة ، نجد الطلاب قادرين على التحكم فى الموقف ، وفى أحيان أخرى قد يلزم أن يتدخل المعلم للمحافظة على النظام داخل المجموعات التى تضم أعضاء عدوانين . وقد يكون من الضرورى أن يُعرّف الطلاب بأن القصد من الأنشطة الجماعية فى حصة الرياضيات هو استقصاء طبيعة المبادىء الرياضية وليس كسب معركة كلامية . وبالرغم من أن المناقشات والمجادلات والاختلافات العقلانية والمضبوطة (المحكومة) تكون مفيدة فى حل المشكلات الرياضية ، إلا أن المواقف غير المتحكم فيها وغير العقلانية والصراعات والتمزق كل ذلك يمكن فقط أن تمنع التقدم نحو تحقيق أهداف الأنشطة الجماعية .

الجماعات غير المستجيبة :

قد يتميز أعضاء مجموعة بالعدوانية ، والأكثر من ذلك انهم قد يتميزون بالسلبية وتثبيط الهمم . والمجموعة الهادئة غير المستجيبة يمكن أن تكون أكثر إحباطاً للمعلم من المجموعة الضوضائية ومفرطة النشاط . فقد يكون من الممكن أن يحدد المعلم طالباً أو اثنين من الأعضاء الهادئين ومفرطى النشاط ، ويوجه لهما اسئلة ومقترحات تثيرهما ، إلا أنه يصعب التعامل مع مجموعة غير مستجيبة بكاملها . وهناك أسباب كثيرة لوجود مجموعة غير مستجيبة : (١) عدم معرفة الطلاب لبعضهم البعض يجعلهم يعزفون عن مناقشة استراتيجيات حل المشكلات داخل مجموعة صغيرة . ففى بداية عام دراسى جديد يكون النشاط الجماعى غير مثمر نتيجة عدم معرفة التلاميذ لبعضهم البعض وربما للمعلم . وهنا يصبح من المناسب تأجيل استخدام نموذج العمليات الجماعية حتى تتم عملية التعارف بين التلاميذ وبعضهم ومعلمهم أيضاً : (٢) نظراً لميل الطلاب لتكوين شلل ، فإن تجميعهم من شلل مختلفة للعمل معاً فى أنشطة أكاديمية قد يشعرهم بعدم الارتياح . ويمكن التغلب على ذلك بتقسيم الطلاب فى مجموعات وفق تفضيلاتهم الاجتماعية ، إلا أن هذا النظام فى التقسيم ينشىء مساوىء وجدانية فربما يكون بعض الطلاب مرفوضا من زملائهم أو مستبعدين علمياً من جمعيات علمية تضم أعضاء معينين من زملائهم (٣) عدم فهم الطلاب للمهمة التى يقومون بها قد تجعلهم لا يستجيبون

أثناء الأنشطة الجماعية ، وربما ترجع عدم الاستجابة لعدم أهمية المشكلة بالنسبة لهم ، أو عدم توافر المتطلبات المسبقة لديهم واللازمة لتحقيق الأهداف الرياضية المطلوبة من المجموعة .

وفى المجموعات غير المستجيبة قد يضطر المعلم لأخذ دور أكثر نشاطا لدفع المجموعة لتبدأ المناقشة والنشاط . ويمكن للمعلم أن يبدأ بتوجيه أسئلة لتحديد مدى فهم الطلاب لما يتوقع منهم من انجاز كمجموعة ، ومدى توافر المهارات المتطلبة لحل المشكلة الموكلة اليهم أو تنفيذ النشاط المعملى المخصص لهم . وإذا كانت المهام أكبر من قدرات المجموعة أو لاتثير اهتماماتهم وميولهم أو معظمهم فإنه يصبح من الضرورى تعديل أهداف الدرس والواجبات المطلوب من المجموعة القيام بها . وإذا مانعت المجموعة فى العمل بسبب اعتبارات اجتماعية فعلى المعلم أن يعين نفسه عضواً فيها ليعمل على بدء المناقشة والنشاط من خلال بعض الأسئلة والمقترحات .

الجماعات غير المثمرة :

قد تفشل المجموعة فى الحصول على نتائج لأسباب تختلف من العدوانية أو السلبية . والجماعات غير المثمرة قد تنجز القليل لأنها غير قادرة على متابعة الموضوع أولا تُعير المعلم إنتباهاً عندما يشرح المهمة . أو قد تفشل فى الاستماع إلى أفكار أعضائها واقتراحاتهم أو قد تُقدم الافكار جزافاً دون قصد أو هدف كما أنهم قد يفشلون فى الاتفاق على خطة عمل أو وضع مجموعة من الاستراتيجيات أو تحدِ غاية يرغبون الوصول إليها . فقد يتحدثون فقط عن تفصيلات للمشكلة دون فهم لكيفية تركيب هذه التفصيلات فى اجراء مايؤدى إلى تحقيق أهداف محددة . إن كثيراً من المناقشات والجالات غير المثمرة تنتج عن فشل المجموعة فى اعادة الانتباه لتعاريف المصطلحات الرياضية ومبادىء المنطق والصيغ المنطقية الصالحة للبرهان . كما قد تصل مجموعة إلى طريق مسدود نتيجة استخدام أعضائها تعاريف مختلفة للمصطلحات أو استخدام تفسيرات متباينة للمبادىء كما قد لاتعرف المجموعة أسباب الصعوبات التى تواجهها .

يستطيع المعلم عادة أن يعرف مصدر المأزق الذى تقع فيه المجموعات عن طريق ملاحظة نشاطات الاعضاء لبضع دقائق . وبعد أن يكتشف الصعوبة يستطيع المعلم أن يشارك فى أنشطة المجموعة لبضع دقائق ليساعد فى تكوين خطة ، تركيب تفصيلات ، تعريف مصطلحات ، توضيح مفاهيم ومبادىء ؛ وتقديم مقترحات ليسير التقدم نحو تحقيق أهداف الدرس .

وعلى الرغم من أن الهدف الرئيسى لنموذج العمليات الجماعية هو معاونة الطلاب ليصبحوا استقصائيين استقلاليين يمكنهم الاعتماد على أنفسهم فى حل المشكلات إلا أنه يصبح لزاماً أن يكون جزء من دور المعلم هو ارشاد العمل الجماعى والمشاركة الحكيمة بين المجموعات والتخطيط للأنشطة بعناية . وحيث أن للمعلم دوراً أقل فى التحكم فى دروس النشاط الجماعى مقارنا بدروس العرض المباشر فالأمر يحتاج إلى تخطيط أكثر عناية وحرصاً وإلى وعى وتوقع للصعوبات التى قد يواجهها الطلاب عند القيام بأنشطة جماعية .

نموذج التعليم والتعلم المزود بالكومبيوتر

تشير العديد من الدراسات إلى إمكانية إستخدام الكومبيوتر بفاعلية كبيرة لتدعيم تعلم الرياضيات . ويوجد بكثير من المدارس الثانوية (فى الولايات المتحدة) أنظمة كومبيوتر صغيرة بعضها قليل التكاليف وبعضها مكلف . ومعظم هذه المدارس تستخدم تسهيلات «كمبيوترية» لتدعيم تعلم الرياضيات . وهناك بعض المدارس لديها أجهزة كومبيوتر كبيرة وغالية لإثراء التعليم فى مختلف المجالات الدراسية من الصف الثالث وحتى الثانى عشر . وفى بعض الحالات تتعاون كثير من الادارات التعليمية لتكوين شبكة كومبيوتر أقليمى كبيرة لخدمة التدريس فى المواد المختلفة فى مدارس تلك الادارات بينما بعض المدارس الأخرى التى لاتتحمل تكاليف كومبيوتر تستعين بالتسهيلات المتوفرة فى المدارس الأخرى . وقد ساعدت الحكومة الفيدرالية (الأمريكية) فى تمويل الكثير من البحوث والمشروعات لتصميم نظم كومبيوتر تستخدم فى التعليم لإنماء مواد تعليمية فى المدارس والكليات . كما دعمت الحكومات والأجهزة المركزية والاقليمية والمحلية المهتمة بالتعليم الجهود الاقليمية والمحلية لتنمية ونشر وتنفيذ المناهج المرتبطة بالكومبيوتر فى المدارس الثانوية .

إن استخدام طلاب المرحلة الثانوية لكومبيوتر داخل الفصول ظاهرة حديثة نسبياً تبعث على الأمل فى تغيير المدخل إلى التعليم الذى أساسه المدرسة . ومع ذلك وبالرغم من الفوائد التربوية من التعليم المزود بالكومبيوتر فهناك العديد من المعوقات لاستخدام الكومبيوتر فى التعليم والتعلم بالمدارس منها : (١) تكاليف الشراء والصيانة أو الايجار . (٢) عدم وجود معلمين مدربين تدريباً كافياً على الاستخدام الفعال للكومبيوتر فى التدريس . (٣) مقاومة كثير من مجالس التعليم ومديرى المدارس للإنفاق على تكنولوجيا حديثة مثل الكومبيوتر لأن تكنولوجيا تعليمية عالية سابقة مثل الدوائر التليفزيونية المغلقة وماكينات التعليم والتعلم البرنامجى فشلت فى تحقيق وعودها فى تثوير التعليم .

وعلى الرغم من تلك المعوقات للتوسع فى استخدام الكومبيوتر فى تعليم وتعلم الرياضيات إلا أنه توجد مبررات قوية لاستخدامه .

أسباب استخدام الكومبيوتر فى تعليم وتعلم الرياضيات :

لعل النفوذ الشديد الذى يمتلكه الكومبيوتر على تعلم الرياضيات ناتجاً عن الزيادة الجوهرية فى دافعية الطلاب نحو مواقف التعلم التى تتضمن أجهزة كومبيوتر . فالحداثة فى استخدام الكومبيوتر يمكن أن تسبب تحسناً كبيراً فى اتجاهات الطلاب نحو تعلم الرياضيات . وبعكس المستحدثات التكنولوجية الأخرى التى لم تسبب دافعية للطلاب نجد أن نفس هؤلاء الطلاب أصبحوا من هواة مقررات الرياضيات المزودة بالكومبيوتر وذلك لأن : (١) كثيراً من الطلاب الذين يكرهون الرياضيات ولايهتمون بتعلمها لم يحصلوا منها على شىء سوى الاحباط والفشل ، وبعض هؤلاء الطلاب يمكن أن يصبحوا خبراء محللين للكومبيوتر ، ومثل هذا النجاح يعمل على تحسين اتجاهاتهم : (٢) بالرغم من أن التعلم عملية نشطة إلا أن معظم استراتيجيات التعلم المستخدمة تضع الطلاب فى

مواقف سلبية وفى أدوار المستقبلين الذين لايملكون التحكم فى بيئتهم التعليمية مما يبعدهم – بالتالى – عن المشاركة فى بيئة عديمة المعنى بالنسبة لهم ، ولكن عند استخدامهم الكومبيوتر يصبحون فى دور المتحكم فيما يقوم به الكومبيوتر وبالتالى يصبح لهم دور نشط ومشاركة فى ادارة بيئة التعلم ذاتها .
(٣) يتكون لدى الناس دافعية للتعلم داخل أو خارج المدرسه لإبتكار أشياء جديدة أو لتشغيل أجهزة أو ليعترف بهم الآخرون أو لتحقيق الذات وكثير من الطلاب يحبون ابتكار برامج كومبيوتر أو القيام بتشغيل الكومبيوتر سواء عن طريق برامج يعّدوها بأنفسهم أو برامج جاهزة . كما أنهم يجدون متعة وارتياحاً لشعورهم بأن جهازاً الكترونيات معقدا مثل الكومبيوتر يقوم بتنفيذ أوامرهم التى تتضمنها البرامج التى يقومون بإعدادها .

والأسباب الثلاثة السابقة وهى : نجاح وشعور الطالب بالسمو ، التحكم فى بيئة تعلمه ، والقيم الدافعية لاستخدام الكومبيوتر فى المدارس – تجعل من المعقول أن نتوقع نجاحاً لاستخدام الكومبيوتر فى تعلم الرياضيات على الرغم من عدم نجاح التكنولوجيا المتقدمة الأخرى فى ذلك . إن التعلم المزود بالكومبيوتر هو تعلم فعال ويبرز انفاق وتخصيص ميزانيات لشراء الأجهزة ذاتها Hardwore والبرامج Softwroوكذلك مواد المقررات Corsewore (وهى مجموعة مصادر التعليم والتعلم مثل برامج الكومبيوتر ، وأوراق العمل المرتبطة والكتب والمسجلات والمواد التعليمية التى تستخدم فى التعلم المزوود بالكومبيوتر فى الفصل) وعندما يشارك الطلاب فى التحكم فى مصادر التعلم المرتبط بالكومبيوتر فإنهم يدركون أن بيئة التعلم المزود بالكومبيوتر تختلف كثيراً عن غيرها من البيئات التقليدية حيث المحاضرات وعروض المعلمين والتحكم فى الطلاب . إن بيئة التعلم المزود بالكومبيوتر والمنظمة بطريقة سليمة والتى يتحكم فيها الطلاب تتيح الفرصة للتعلم الفعال ، لأن الطلاب يستخدمون الفصل كمعمل تعلم يتفاعلون فيه مع تنوع من اختيارات التعلم الجاذبة لهم . وبهذه الطريقة فإن بيئة التعلم المصطنعة بعض الشيء والتى أساسها المدرسة يمكن أن تمتلك الخصائص الايجابية التى تتوافر فى بيئات التعلم غير المدرسية الجيدة . وبالإضافة إلى ذلك فإن الاثابة والاشباع والعوامل الايجابية الأخرى التى يمكن أن تجعل الطلاب يعملون بجد لتعلم الرياضيات فى فصل مزود بالكومبيوتر تشبه العوامل الإيجابية التى تحفز الناس على التعلم خارج المدرسة . ومن ثم يصبح التعلم فى المدرسة أكثر قرباً وارتباطاً بالتعلم فى « العالم الحقيقى » وهذا ما يقصده الطلاب عند الحديث عن التعلم غير المدرسى .

طرق استخدام الكومبيوتر فى تدريس الرياضيات :

يتكون نموذج التعليم والتعلم المزود بالكومبيوتر من طرق متعددة لإستخدام الكومبيوتر فى تعلم الرياضيات فى الفصل . وتتميز هذه الطرق بدرجة مشاركة الطلاب والمعلم والكومبيوتر فى التحكم فى عملية التعليم والتعلم . والتساؤل العام هو : هل يتحكم الكومبيوتر فى الطالب أم أن الطالب يتحكم فى الكومبيوتر ؟ وبطبيعة الحال ليس للكومبيوتر تحكم من عنده على الطالب ، ولكن تحكم

تعليماته تكمن فى برامجه التى قد يعدها المعلم أو الطلاب أنفسهم أو طلاب آخرون أو مبرمجون محترفون وإلى حد كبير فإن التعليمات التى يضعها المبرمج كما ينبغى أن يقوم به الكومبيوتر هى التى تحدد كيف يتفاعل البرنامج مع الطالب الذى يعمل مع محطة كومبيوتر .

التعليم المُدَار بالكومبيوتر (ت د ك CMI) :

إن أحد الطرق التى يستخدم فيها الكومبيوتر فى تعليم الرياضيات التى أثبتت عدم نجاحها كما توقع لها الداعون اليها هى التعلم المدار بالكومبيوتر . وهذه الطريقة تمثل طريقة غير مباشرة لإستخدام الكومبيوتر فى الفصل ، ذلك لأن الطالب لايتحكم كثيراً فى الكومبيوتر الذى يتم تشغيله بطريقة « ت د ك » وقد لايكون له اتصال مباشر بالكومبيوتر نفسه ، ففى هذه الطريقة يستخدم لإجراء الكثير من أو كل أوجه التعليم والتعلم مثل :

١ – إدارة التمارين التدريبية لأفراد الطلاب

٢ – تقويم وتقدير درجات إجابات التمارين وتوفير تغذية مرتجعة منها

٣ – إدارة الاختبارات القبلية والبعدية لأفراد الطلاب وتقويم وارشاد عمل كل طالب .

٤ – الاحتفاظ بسجلات الطلاب الاكاديمية والشخصية والارشادية والصحية .

٥ – وضع أهداف التعلم المعرفية (وأحيانا الوجدانية) لكل طالب .

٦ – وضع مواصفات أنشطة التعلم لأفراد الطلاب عن طريق تحليل وتقويم تقدم كل طالب باتجاه أهداف تعلمه الخاصة .

٧ – توجيه الطلاب وارشادهم عن التعليم العالى وفرص العمل .

٨ – تجميع بيانات وحفظ سجلات وحساب متوسطات الدرجات وإعطاء تقارير عنها .

٩ – ادارة وترتيب المصادر والمعدات التعليمية .

١٠ – تسجيل الأعمال اليومية للمعلمين .

وقد كان من المعتقد أن استخدام « ت د ك CMI » سوف يحرر المعلمين من الكثير من الأعمال الروتينية وإعداد سجلات الأنشطة المدرسية حتى يتوفر لهم الوقت للتدريس الفردى وتقويم الطلاب والأنشطة المهنية الأخرى التى تحتاج إلى العقل الإنسانى . ورغم قوة هذه الأسباب فإن العديد من المعلمين رفضوا التنازل عن بعض أدوارهم التقليدية لتلك الآلة . كذلك فإن توقف الكومبيوتر عن العمل الذى قد يستمر من عدة ثوان إلى بضعة أيام لا يُعطل المخطط لها فحسب بل ينتج عنه – فى بعض الأحيان – فقدان بيانات وسجلات ليست لها نسخ أخرى .

وبالرغم من أن هذا الفشل يحدث نادراً فإن الكثير من المعلمين الذين يستخدمون «ت د ك CMI » يحتفظون بسجلاتهم مما يجعل عمل الكمبيوتر نوعاً من العمل الزائد عن الحاجة . وقد وجد المعلمون أن الاستخدامات الأخرى للكومبيوتر فى التعليم يمكن تعديلها بحيث تتضمن الوظائف الإدارية « ت د ك » « CMI » بالإضافة إلى السماح بتحكم الطالب المباشر فى الكومبيوتر والذى

يوفر وسائل تحقيق أهداف تعلّم معرفية ووجدانية أساسية . إن طريقة ت س ك لازالت طريقة حيوية فى استخدام الكومبيوتر فى التعليم ولكنه من المشكوك أنها سوف تحدث تثويراً فى تعليم الرياضيات .

التعليم المساعد بالكومبيوتر (ت س ك ، CAI) :

لقد تمثلت التطبيقات التربوية الأولى لاستخدام الكومبيوتر فى تعلم الرياضيات فى طريقة التعلم المساعد بالكومبيوتر والتى أُستخدِمت تجريبياً لتوفير وتحقيق التدريب على المهارات الحسابية منذ عام ١٩٦٥ . وقد طُوّرت طريقة ت س ك [CAI] » حالياً إلى طريقة تعليمية مصقولة ينتج عنها تقويم على مستوى رفيع الإستجابات الطلاب وتفريعات بديلة لمتابعات التعلم وتحكم وتفاعل الطالب ومنظومة التعليم والتعلم . وينشغل الطلاب الذين يعملون بطريقة « ت س ك » فى التمرين والتدريب على المهارات واداء الاختبارات فيها ، واكتشاف المفاهيم وعرض وبرهنة المبادىء .

وقد كُتبت برامج ت س ك [CAI] »فى تعليم الرياضيات تمد الطلاب بالكثير من اختيارات التعلم . فمثلًا قد يحدد الطالب نوع المشكلة أو لاستجابة التى يرغبون فى أن يظهرها الكومبيوتر ويمكنهم أن يطلبوا شروحاً خاصة للمفاهيم أو الاتصال بالمعلمين عن بعد من خلال محطات الكومبيوتر ، وهذه بدورها يمكن أن يحللها المعلمون وأن يضعوا تغييرات من عندهم فى البرامج موضع الدراسة . وهناك بعض محطات ت س ك [CAI] التى تعمل عن بعد والغالية التكاليف نسبياً تمتلك مصورات ملونة ومركبات صوتيه ومرئية (فيديو) تعمل بالكومبيوتر ، وشاشات تعمل باللمس وأنظمة اتصال معقدة (محطة الكومبيوتر هى اداة ارسال واستقبال تستخدم فى الاتصال بين الطالب ونظام الكومبيوتر ، وقد يتواجد الطالب والكومبيوتر فى نفس الغرفة وقد تفصلها آلاف الأميال ، كما أن الطالب قد يستقبل و يرسل معلومات مثل الرسائل المطبوعة على الورق بآلة تشبه الآلة الكاتبة أو مثل الرسائل التى ترسل على مايشبه شاشه التليفزيون) . وتستخدم طريقة ت س ك [CAI] لتعليم الرياضيات فى تعليم وتعلم أنواع عديدة من المهارات وبعض المفاهيم وبضع مبادىء وتمثل مستويات المعرفة والفهم غالبية الأهداف المعرفية التى تتحقق من خلال طريقة ت س ك [CAI] فى تعليم الرياضيات . ومع ذلك فإن أهدافاً معّينة على مستوى التحليل والتركيب يمكن أن تتحقق بإستخدام برامج ت س ك [CAI] . وفى هذه الطريقة يقع معظم التحكم فى موقف التعلم على عاتق المعلم وعلى مُصمم البرنامج الذى يكتب الدورس المبنية على استخدام الكومبيوتر . وبالرغم من ذلك فإن أفضل نظم ت س ك ت دك [CAI] تمد الطلاب بدرجة من التحكم فى الكومبيوتر أثناء معظم الدروس المبنية على استخدامه .

المحاكاة فى الكومبيوتر :

الطريقة الثالثة الهامة لاستخدام الكومبيوتر فى التعليم كما هو الحال فى إدارة الأعمال والصناعة

والأعمال الحكومية – هى محاكاة النظم المعقدة لدراسة خواصها وتأثير تعديل المعْلَمات (البارمترات) على كل نظام . وتوفر المحاكاة عن طريق الكومبيوتر طريقة غير مكلفة لدراسة تطبيقات دون لزوم الإتصال مع المواقف والنماذج الفيزيقية الحقيقة . ويستطيع الطلاب إستخدام المحاكاة المبنية على الكومبيوتر فى تطبيق المبادىء الرياضية على الاقتصاد وإدارة الأعمال والصناعة والعلوم ونظم البيئة والطب والسياسة وأنواع مختلفة من نظم التفاعل الاجتماعى ويمكن محاكاة التطبيقات الرياضية التى ترتفع تكاليف محاكاتها فى معمل المدرسة ، وذلك من خلال الكومبيوتر (مثل مشكلات ديناميكا الطيران وديناميكا الحرارة) ، وكذلك الحال بالنسبة للكثير من التجارب التى ينتج خطورة عند إجرائها فى المعمل – مثل التفاعلات النووية والظواهر البيئية . فإنه يمكن محاكاتها عن طريق الكومبيوتر ، ومن ثم يسهل تدريسها لطلاب المرحلة الثانوية . ويمكن تقديم محاكاة الظواهر الرياضية البسيطة والمعقدة كألعاب فى الكومبيوتر . وفى الحقيقة فإنه يمكن برمجة كثير من الألعاب الرياضية المعروفة ويجد الطلاب متعة كبيرة فى ألعاب الكومبيوتر ويقضون فيها وقتاً طويلاً ، فى كتابة برامجها وفى نفس الوقت يتعلمون حقائق ومهارات ومفاهيم ومبادىء وطرق حل مشكلات رياضية .

ويمكن للمحاكاة المبنية بناءً جيداً أن تساعد الطلاب فى ممارسه مهاراتهم فى التحليل والتركيب نظراً لأنها يجب أن تضع فى الأعتبار خواص النظم والتطبيقات الرياضية بالإضافة إلى تأثير التفاعلات بين مركبات الكومبيوتر . وهناك قدر كبير من التحليل والتركيب مطلوب للإعداد لعمليات المحاكاة فى الكومبيوتر . فعندما لاتسلك برامج الكومبيوتر الإتجاه الذى يتوقع منها أو عندما تحيد المحاكاة عما هو مطلوب ، يصبح على الطلاب ضرورة تقييم المشكلة وتوليف محسّنة لنمذجة وعمل محاكاة الظواهر المرتبطة بالرياضيات . عند استخدام الألعاب والمحاكاة فى الكومبيوتر يكون للطلاب قدر كبير من التحكم على مَعْلَمات (بارامترات) النظام الذى تم محاكاته . ومع ذلك فإنهم قد يكونون مقيدين بالعدد المحدود من المتغيرات التى يمكن أن تبنى داخل المحاكاة وبالقيم المسموح لكل متغير أن يأخذها فى معظم النماذج ومجموعات المحاكاة يكون من اللازم حذف كثير من جوانب النظام الحقيق حتى يمكن السيطرة على المشكلة . وتعطى المحاكاة للطلاب قدراً من التحكم الحقيقى فى تنفيذ برامج الكومبيوتر وتشعرهم بالسيطرة على بيئة التعلم، ألا وهى الكومبيوتر فى هذه الحالة .

حل المشكلات المبنى على الكومبيوتر :

عند دراسة الرياضيات بطريقة حل المشكلات المبنى على استخدام الكومبيوتر . فإن الطلاب يكتبون وينفذون ويعدّلون برامجهم الخاصة لحل مشكلات رياضية معينة . وهذه هى أول طريقة يطلب فيها من الطلاب كتابة برامجهم الشخصية . ففى الطرق الثلاث السابقة لإستخدام الكومبيوتر ت د ك ، ت س ك [CMI, CAI] والمحاكاة يتفاعل الطلاب تقريباً مع برنامج وصفه اخرون وتم إختزانه فى ذاكرة الكومبيوتر . ولكى يستخدم الطلاب الكومبيوتر لحل المشكلات ينبغى عليهم أن يتعلموا لغة للبرمجه . ويشعر الطلاب دوماً بمتعة عندما يفعلون ذلك

وبالرغم من وجود عدد من لغات البرمجة الممتازة والموجهة علمياً مثل ALGOL, FORTRAN, P L I ALI إلا أن أكثر اللغات استخداماً فى المدارس الثانوية هى لغة BASIC وهى سهلة التعلم وقريبة جداً من اللغة الانجليزية ولها وجهة علمية ، فمعظم طلاب المرحلة الثانوية يمكنهم التمكن من أساسيات لغة BASIC فى عشر حصص مع عشرين ساعة للمران على كتابة برامج بهذه اللغة . وهناك كتب عديدة لتعليم هذه اللغة معدّة فى مستوى طلاب اعدادى والثانوى وأيضاً هناك المجلات المتخصصة .

لعل أفضل الطرق لتعلم كيفية حل المشكلات باستخدام الكومبيوتر إذ أنه لحل مشكلة باستخدام الكومبيوتر ينبغى على الطالب أن يأخذ تقريراً عاماً عن المشكلة ويترجمها إلى خوارزمية دقيقة والتى تمثل احياناً فى صورة خريطة تدفق ، ثم تترجم الخوارزمية إلى برنامج كومبيوتر صحيح منطقياً وبنائياً . وحيث أن الكومبيوتر ينفذ بدقة مايؤمر به فى البرنامج فإنه لايوجد مجال للخطأ أو سوء التفسير . وحيث أن معظم البرامج تحتوى على الأقل على خطأ واحد عندما تكتب لأول مرة فان الطالب سوف يصحح برنامجه فى ضوء المشكلات التى يواجهها عندما يحاول الكومبيوتر تنفيذ تعليمات البرنامج . ومن ثم فإنه إذا ما أريد تنفيذ البرنامج بطريقة صحيحه وجب تحليله وتقويمه وتصحيحه – وهذه خطوة حرجة فى أى نوع من استراتيجيات حل المشكلات .

وتوضح البحوث والممارسات أن كتابة برامج لحل مشكلات رياضية تمثل طريقة جديدة لتعلم حقائق ومفاهيم ومبادىء ومهارات رياضية . ويمكن استخدام حل المشكلات عن طريق الكومبيوتر لتحقيق أهداف معرفية على مستوى الفهم والتحليل والتركيب والتقويم . وجدير بالذكر أن الطالب غير المستوعب للعناصر الرياضية لمشكلة مالايمكنه حتى أن يبدأ فى كتابة برنامج كومبيوتر لحل هذه المشكلة ، إذ أن كتابة برنامج لحل مشكلة رياضية يتطلب تحليل المشكلة وتركيب خوارزمية كما أن تصحيح الأخطاء المنطقية والبنائية فى البرنامج تتطلب تقويماً دقيقاً للبرنامج والخوارزمية حل المشكلة . ويحقق العمل بالكومبيوتر أهدافاً وجدانية – بلاضافة للمعرفية – مثل الاشباع فى الاستجابة وتفضيل قيم معينة والالتزام بها وإقرار نظام قيمىّ وحيث أنه عند استخدام الكومبيوتر لحل المشكلات يقوم الطالب بحل مشكلات يحددها المعلم ، الذى يقوم أيضاً بتقويم أعمال الطالب ، من هنا فإن التحكم فى بيئة التعلم يصبح عملية مشاركة بين الطالب والمعلم . ومع ذلك فكل طالب يستخدم الكومبيوتر لحل مشكلة عن طريق تنفيذ برنامجه الذى قام بتصميمه ، يصبح على درجة كبيرة من التحكم فى نظام الكومبيوتر ، الأمر الذى يمثل أبرز عناصر هذه الطريقة فى إستخدام الكومبيوتر فى التعليم .

الاستخدام الشمولى للكومبيوتر :

الطريقة الخامسة والأكثر حداثة لاستخدام الكومبيوتر فى رياضيات المرحلة الثانوية تُسمَى بالنظام

(*) انظر مثلا كتاب :
Dioyer and Kaufman, Guided Tour of Computing Programming In Basic (Baston Houghton Mif Co, 1973)

الشمولى للكومبيوتر . وتتسم هذه الطريقة بسيطرة الطلاب ، حيث لايقتصر دور الطالب فيها على كتابة البرنامج لحل المشكلة فحسب بل يبتكر أيضاً بعض المبادىء ويوسع بعض المعلومات ويعلم طلاباً آخرين كيفية حل المشكلات ويتعلم كيف يتعلم . ويتحمل الطالب فى هذه الطريقة معظم المسئولية لتنظيم جزء أساسى من مقرر فى الرياضيات . والطالب قد يستخدم الكومبيوتر فى كل الطرق الثلاث « ت س ك » [.CAI] المحاكاة وحل المشكلات ليخلق جزءً من مقرر الرياضيات المبنى على الكومبيوتر مما يساعده فى تعلم الرياضيات ، كما قد يكون مفيداً لطلاب آخرين أو المعلمين أو متخصصين فى مجال التعليم المرتبط بالكومبيوتر . فعلى سبيل المثال قام « ميشيل كوفمان » بتأليف جزء كبير من كتابه « مع دوبر » عن برمجه الكومبيوتر بلغة BASIC وهو طالب فى الصف النهائى من المرحلة الثانوية . والطلاب الذين يعملون بالكومبيوتر شمولياً يصبحون شركاء متساوين مع معلميهم فى تعليم وتعلم الرياضيات وذلك لانشغالهم الديناميكى فى تحليل وتركيب وتقويم وتطبيق المفاهيم والمبادىء .

وبسبب حداثة وتعقيد الطريقة الشمولية فإنه يصعب تعريفها بدقة . وقد وصفت بعض عناصر الإستخدام الشمولى للكومبيوتر فى مشروع Solowork الذى تم تنفيذه فى جامعة بنسبرج بأنها : تعلم مفتوح ، تعلم يتمركز حول الطلاب ، تعلم بينى (يجمع بين مجالات مختلفة) ، تعلم مضمون النجاح ، فالطلاب الذين كانوا يوصفون بالتخلف الدراسى وكانوا يكرهون المدرسة نضجوا فجأة وحققوا نجاحاً عند استخدامهم الكومبيوتر بالطريقة الشمولية . وقد وُجد طلاب فى هذا المشروع يتعلمون الرياضيات والعلوم والبرمجة عن طريق ابتكار أفكار وألعاب ومحاكاة وأدوات فيزيقية أخرى وأن هؤلاء الطلاب قاموا بانجازات جعلتهم يكتسبون إحترام زملائهم ومعلميهم ويبدو أن الكثير من الطلاب قادرون على النجاح فى تعلم الرياضيات فى بيئة الاستخدام الشمولى للكومبيوتر لأنهم يتمكنون من تشكيل الاجراءات التعليمية لتناسب أساليبهم الخاصة فى التعلم .

مدخل للتعليم المزود بالكومبيوتر :

فى الفترة بين عامى ١٩٧٠ ، ١٩٧٧ قام الذين اشتركوا فى مشروع تعلم مزود بالكومبيوتر أُطلق عليه مشروع Solo بتجريب إستخدام الكومبيوتر فى المدرسة الثانوية (من الصف السابع حتى الثانى عشر) بطرق عديدة وقاموا ببناء خلايا تعليمية (موديولات) لمناهج مرتبطة بالكومبيوتر . وقد ركز مشروع « سولو » الذى كان مشتركاً بين مؤسسة العلوم القومية N S F وجامعة بتسبرج – على التعلم المزود بالكومبيوتر فى رياضيات المرحلة الثانوية وتطبيقاتها فى العلوم والهندسة ومجالات أخرى . وكان الهدف الرئيسى للمشروع هو إثارة الطلاب ودفعهم للتحليل والتركيب والتقويم وتطبيق الرياضيات بأنفسهم باستخدام خوارزميات حل المشكلات والإستخدام الشمولى للكومبيوتر كعوامل منشطة . وقد صُممت أكثر من مائه خليه تعليمية وأُنتجت بواسطة مشروع « سولو » لمساعدة طلاب المدرسة الثانوية على إستخدام الكومبيوتر كأداة لفحص المفاهيم والمبادىء المتضمنة فى موضوعات للرياضيات من المرحلة الثانوية والجامعية .

فى المرحلة الثانية للمشروع والتى أطلِق عليها « سولو يعمل » Soloworks تم تكوين خمسة معامل للرياضيات مرتبطة بالكومبيوتر وأُستخدمت تجريبياً بواسطة طلاب من الصف السادس وحتى الثانى عشر . وقد هدفت هذه المعامل إلى إنماء مداخل بينية المجالات لتعلم مفاهيم ومبادىء رياضية على مستوى عالٍ مستخدمين مدخلًا لتعلم الرياضيات أُطلِق عليه مدخل « فوق – تحت » (Top- down) ويبدأ هذا المدخل باختيار أفكار رياضية جوهرية وتحديد مهارات وأنشطة بحيث يمكن أستخدامها لتحفيز الطلاب على دراسة هذه الأفكار فى المدارس ثم تحليلها لتحديد المهارات والمفاهيم والمبادىء الأدنى التى يجب التمكن منها أثناء تعلم كلٍ من الأفكار العالية . وأخيراً يدرس طلاب رياضيات المرحلة الثانوية هذه الأفكار القوية والطرق الرياضية من خلال تطبيقها فى مداخل بينية المجالات لتعلم الرياضيات وق أُطلق على المعامل الخمسة التى اُنشئت : معمِل الكومبيوتر ، معمل النمذجه والمحاكاة ، معمل الديناميكا ، معمل التركيب والتوليف ومعمل التصميم المنطقى .

معمل الكومبيوتر : ويركز على تطبيقات الكومبيوتر فى الرياضيات وعلى البرمجة والعناصر الخوارزمية فى الرياضيات . وفى هذا المعمل يُستخدَم الطلاب الكومبيوتر والتكنولوجيا المرتبطة به لحل مشكلات رياضية وكتابة خلايا تعليمية لمناهج « ت س ك » [CAI] ويبنون ألعاباً تعتمد على الكومبيوتر ، ويكتبون مجموعات محاكاة وتطبيقات رياضية مبنية على الكومبيوتر .

معمل النمذجة والمحاكاة : ويستخدَم الرياضيات كأداة لإبتكار نماذج جديدة فيزيقية أو كمبيوترية لأشياء حقيقية والتى يمكن للطلاب التعامل بها ودراستها وقد قام الطلاب وهيئة المشروع ببناء نموذج فيزيقى لإنزال قمر يتم التحكم فيه بواسطة الكومبيوتر . كما قام الطلاب ببرمجة مجموعات محاكاة بالكومبيوتر لنماذج احتمالية وديناميات رحلات وغير ذلك من عمليات فيزيقية .

معمل الديناميكا : ويركز هذا المعمل على الطرق الرياضية لوصف ودراسة العمليات الفيزيقية التى تتحرك فى الزمان والمكان . ويصور هذا المعمل مُحاكٍ لرحلة طيران حقيقية وجهاز تعيين مواقع يعمل بالكومبيوتر يستخدمه الطلاب لتعلم الرياضيات والعلوم المتضمنة فى أساليب الملاحة الجوية وأدواتها . والمحاكى لرحلة الطيران و الذى كان عبارة عن نموذج لمقصورة الطيار فى طائرة صغيرة يمكن قيادته بواسطة طالب يجلس فى هذا النموذج ، كما يمكن تشغيلة ورسم خريطة لمساره بواسطة برنامج كومبيوتر وجهاز تعيين المواقع .

معمل التركيب والتوليف : ويختص بدارسة الرياضيات المتضمنة فى انتاج مؤثرات معقدة عن طريق تجميع وتوليف عمليات بسيطة . ويتمثل أحد مكونات هذا المعمل فى نوع من الأرغن الذى يمكن أن يُعزَف بواسطة عازفين أو بواسطة برنامج كومبيوتر وضعه الطلاب مع هيئة المشروع . وقد تمكن بعض الطلاب فى هذا المعمل من دراسة رياضيات الموسيقى والرياضيات المتضمنة فى تشفير (Coding) الموسيقى التى يحكمها الكومبيوتر .

معمل التصميم المنطقى : وتم بناء هذا العمل نتيجة وجود المعامل الأربعة الأخرى . ففى هذا

المعمل تُدرس مبادىء العلوم والرياضيات والالكترونيات اللازمة لبناء المعامل الأخرى . وهنا لايدرس الطلاب المبادىء الرياضية للمنطق فحسب ولكنهم يقومون بتصميم وجمع مركبات الأدوات اللازمة للمعامل الأخرى .

ولما كان العمل الرئيسي فى مشروع Solo ومشروع Soloworks هو الكشف عن أفضل الطرق لاستخدام الكومبيوتر والأشكال الأخرى من التكنولوجيا فى تعليم وتعلم الرياضيات ، فإنه يمكن تصنيف بعض أنشطة مشروع سولو على أنها بحوث وتنمية وأعمال معملية . وقد تم تجريب أفكار مشروع سولو لإستخدام الكومبيوتر فى تعليم الرياضيات فى عدد كبير من مدارس بتسبرج الكبرى . ويستخدم فى مختلف انحاء الولايات المتحدة بعض الخلايا التعليمية لمنهج مشروع سولو والتى تم نشرها وتوزيعها عن طريق بعض المؤسسات المتخصصة .

مصادر التعلم المزود بالكومبيوتر :(*)

هناك مصادر كثيرة يمكن إستخدامها فى معامل الرياضيات المرتبطة بالكومبيوتر .

(*) توجد الآن كتب ومجلات عربية عن الكومبيوتر واستخداماته فى التعليم .

تمارين وأنشطة

١ - استخدم أحد كتب الرياضيات المقررة بالمرحلة الاعدادية أو الثانوية ، واختر بعض النظريات والقضايا التى يمكن اثباتها باستخدام الصور المختلفة للبرهان . أعطِ أمثلة من كل من الحساب والجبر والهندسة والمثلثات لقضايا ونظريات يمكن اثباتها باستخدام .

أ - قانون الوضع
و - البرهان باستنفاذ الحالات
ب - الانتقالية
س - الاستقراء الرياضى
ج - قانون الرفع
ح - المثال المضاد
د - الطريقة الاستنباطية
ط - المثال المضاد
هـ - عكس النقيض

٢ - اختر نظرية من الهندسة المئوية يكون برهانها طويلًا ومعقداً ثم حلل كل خطوة فى البرهان للكشف عن الصورة المنطقية للبرهان التى وراء هذه الخطوة ، واكتب اسم الصيغة المنطقية التى تبرر الخطوات المختلفة .

٣ - ضع مخططاً للعديد من الطرق التى يمكن استخدامها فى الفصل لمساعدة الطلاب فى تعلم الاستراتيجيات العامة للبراهين النظرية .

٤ - ضع مخططاً لنموذج عام لتعليم وتعلم البرهنة النظرية والذى يمكن استخدامة لوصف مدخل حلزونى لتعليم وتعلم البرهنة النظرية فى رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية .

٥ - ضع قائمة لأهداف تعلم معرفية ووجدانية والتى يمكن استخدامها لتبرير التأكيد على البرهنة النظرية فى رياضيات المرحلتين الاعدادية والثانوية .

٦ - راجع الأساليب الـ ٥٦ المستخدمة فى الخطوات الخمس المكونة لنموذج حل المشكلات ، وضع عدة أساليب إضافية لكل من الخطوات الخمس .

٧ - راجع الحوار بين المعلم والطالب فى حل مشكلة إيجاد طول القطر الداخلى لمتوازى المستطيلات ، تخير موضوعاً آخر واكتب حواراً مماثلًا لحل المشكلة التى تختارها .

٨ - اكتب ملخصاً لبعض الاستاتيجيات التى قرأت عنها فى مراجع أخرى - غير هذا - عن حل المشكلات .

٩ - ضع قائمة لبعض المواد التى يمكن تجهيز معمل بها فى حدود ميزانية قدرها (٣٠٠) جنية مصرى .

١٠ -ضع تصميماً لمعمل رياضيات فى غرفة مستقلة .

١١ -ضع خطة لدرس معملى لأحد الموضوعات الرياضية فى المرحلة الاعدادية أو الثانوية .

١٢ -قم بزيارة لبعض مراكز الوسائل التعليمية ثم اكتب قائمة بالأجهزة والأدوات المتوفرة لتدريس الرياضيات بالنموذج المعملى .

١٣ -لخص الاستراتيجيات الأربع للنموذج الاستقصائى واقترح بعض الاستراتيجيات العامة التى يمكن استخدامها لمساعدة الطلاب فى تنفيذ كل مرحلة فى معمل أو فصل للرياضيات .

١٤ -ضع خطة لدرس يعرض باستراتيجية استقصائية مستعينا بماجاء بالدرس الاستقصائى فى الاحتمالات .

١٥ -اكتب وناقش خمسة أهداف معرفية يمكن تحقيقها باستخدام العمليات الجماعية وخمسة أهداف وجدانية يمكن تحقيقها من خلال أنشطة جماعية .

١٦ -اقترح خمسة مواقف يمكن أن تنشأ فى مجموعة صغيرة من الطلاب يقومون بمهمه تعليمية بدون مساعدة أو إشراف من المعلم . ثم أقترح بعض الطرق التى يمكن أن يتدخل بها المعلم فى المجموعة لمساعدتها فى حل تلك التعقيدات التى تعوق تقدم المجموعة .

١٧ -اعِط مثالًا من الرياضيات لمعالجة مشكلة بنفس الطريقة التى اتبعت مع مشكلة الهبوط على القمر

١٩ -ناقش إيجابيات وسلبيات استخدام الكومبيوتر فى تعليم وتعلم الرياضيات .

٢٠ -ناقش امكانيات استخدام الكومبيوتر فى المدرسة المصرية لتدريس الرياضيات

مراجع مختارة

Barbe, W. B. *Psychology and Education of the Gifted: Selected Readings*. New York: Appleton-Century-Crofts, 1965.

Dunn, Lloyd M. (Editor). *Exceptional Children in the Schools* (2nd Edition). New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.

This book contains 10 chapters, which were written by nine authors, pertaining to teaching exceptional children. The chapters deal with mild, moderate and severe general learning disabilities; superior cognitive abilities; behavioral disabilities; oral communication disabilities; hearing disabilities; visual disabilities; health problems; and major specific learning disabilities.

Earle, Richard A. *Teaching Reading and Mathematics*. Newark, Delaware: International Reading Association, 1976.

This 88-page monograph offers mathematics teachers ideas and methods for assessing students' abilities to read and understand mathematics books, and suggests ways for teachers to help students improve their reading skills. It is intended to provide the "what and how" of teaching reading in mathematics while teaching mathematics content. The book contains many specific activities for assessing and improving mathematical reading skills.

Gallagher, J. J. "Gifted Children." *Encyclopedia of Educational Research*. New York: Macmillan, 1969, pp. 537-544.

———. *Teaching the Gifted Child* (Revised Edition). Rockleigh, New Jersey: Allyn and Bacon, 1975.

An excellent resource for teachers who teach special classes for gifted students or who have gifted students in their regular courses, this book is recommended as a reference for mathematics teachers.

Hater, Mary A. and Kane, Robert B. "The Cloze Procedure as a Measure of Mathematical English." *Journal for Research in Mathematics Education*, 1975, Vol. 6, No. 2, pp. 121-127.

The article describes how the cloze procedure can be used to assess readibility of mathematical materials, and presents the conclusions from a study designed to "adapt the cloze procedure to the language of mathematics and to assess its behavior as a measure in that language."

Henry, Nelson B. (Editor). *Education for the Gifted. Fifty-seventh Yearbook, National Society for the Study of Education, Part II*. Chicago: University of Chicago Press, 1958.

This Fifty-seventh Yearbook of the National Society for the Study of Education contains 18 chapters on teaching gifted students. These chapters, which were contributed by 21 professional educators, are organized into three sections about gifted students—*Social Factors, The Gifted Person*, and *Education of the Gifted*. Included in the book are chapters about the nature of giftedness, identification of the gifted, secondary-school programs for gifted students, guiding the gifted, and preparing teachers for the education of gifted students.

Herber, Harold L. *Teaching Reading in Content Areas*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1970.

A general book about the importance of reading in the content areas, this book contains a considerable amount of information which is related to teaching reading in the mathematics classroom. It also has an appendix titled "Reading and Reasoning Guides: Mathematics."

Jacobs, Harold R. *Mathematics A Human Endeavor*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1970.

Although not designed specifically as a textbook for slow learners, Jacobs' book can be used quite successfully for junior high school courses, courses in high school for slow learners, and beginning general mathematics courses in college. The book contains many interesting mathematics topics and student activities. Whether or not it is used as a textbook for a mathematics course, it should be in the mathematics library and should be used as a resource by teachers and students.

Keating, Daniel P. (Editor). *Intellectual Talent: Research and Development*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1976.

This book of readings contains 18 chapters about research studies, findings, and conclusions related to the early childhood education of intellectually gifted people. The papers contained in the book are based uoon the Sixth Annual Blumberg Symposium on Research in Early Childhood Education. The chapters are organized under three headings—*Identification and Measurement of Intellectual Talent, Programs for Facilitation of Intellectual Talent,* and *The Psychology of Intellectual Talent.*

Kirk, Samuel A. *Educating Exceptional Children* (2nd Edition). Boston: Houghton Mifflin Company, 1972.

This book is about many different kinds of exceptional children. It is intended to be the basis for a general, introductory course on the characteristics, needs, and education of exceptional children—slow learners, handicapped children, and gifted students. However, many teachers will find certain chapters to be useful references when teaching students with specific learning handicaps or students who are exceptionally talented. The book contains chapters about speech-handicapped children, the intellectually gifted, low intelligence, mental retardation, auditory handicaps, visual problems, neurologic and orthopedic impairments, and behavior disorders.

A very readable and useful book for teachers, *Educating Exceptional Children* contains an excellent chapter (pages 105-158) titled "The Intellectually Gifted Child." In fact, Kirk's book is a valuable resource for any teacher who encounters various types of exceptional children in his or her classes.

Laycock, F., and Caylor, J. S. "Physiques of Gifted Children and Their Less Gifted Siblings." *Child Development,* 1964. Vol. 35, pp. 63-74.

Love, Harold D. *Educating Exceptional Children in a Changing Society*. Springfield, Illinois: Charles C. Thomas, Publisher, 1974.

This book contains chapters about educating various kinds of exceptional children—mentally retarded, visually disabled, speech-handicapped, hearing

impaired, physically handicapped, socially and emotionally maladjusted, learning disabled and gifted. Each short chapter contains a brief overview of several relevant factors in teaching a particular type of exceptional student.

Marland, S. P. (Submitter) *Education of the Gifted and Talented.* Washington, D.C.: U.S. Office of Education, 1972.

Martinson, R. A., and Seagoe, M. V. "The Abilities of Young Children." *CEC Research Monograph B4*. Virginia: Council for Exceptional Children, 1967.

National Council of Teachers of Mathematics. *The Slow Learner in Mathematics: Thirty-fifth Yearbook.* Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1972.

An excellent resource on teaching mathematics to slow learners, this book contains 12 related sections written by classroom teachers and mathematics educators. The section titles are:

1. Characteristics and Needs of the Slow Learner
2. The Research Literature
3. Behavioral Objectives
4. A Favorable Learning Environment
5. Adjustment of Instruction (Elementary School)
6. Teaching Styles (Secondary School)
7. Aids and Activities
8. The Laboratory Approach
9. Diagnostic-Prescriptive Teaching
10. Classroom and School Administration
11. Promising Programs and Practices
12. The Training of Teachers

Appendix A: Activities, Games, and Applications
Appendix B: Sample Lessons

Project on the Academically Talented Student and National Association of Secondary-School Principals. *Administration: Procedures and School Practices for the Academically Talented Student in the Secondary School.* Washington, D.C.: National Education Association of the United States, 1960.

Even though it was published in 1960, this book still contains much relevant information about educating gifted secondary-school students in the nineteen eighties. The book has chapters about identifying gifted students, accelerating learning, ability grouping for students, enrichment teaching/learning strategies, and counseling and guiding gifted students.

School Mathematics Study Group. "Mathematics for Disadvantaged and Low Achieving Students: Newsletter No. 33." Stanford University, California: SMSG, September, 1970.

This newsletter contains a report and description of SMSG textbooks for slow learners in mathematics.

Shepherd, David L. *Comprehensive High School Reading Methods.* Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Publishing Company, 1973.

Secondary school teachers will find among the 13 chapters in this book the following helpful topics for teaching students how to read and understand mathematics: *Effective Teaching Through Diagnosis, Vocabulary Meaning and Word Analysis, Comprehension of Reading Material, Reading Study Skills for the Student, Applying the Reading Skills to Mathematics.*

Shields, J. B. *The Gifted Child.* London: The National Foundation for Educational Research in England and Wales, 1968.

This 96 page soft-bound book contains summaries of research findings and conclusions about certain characteristics of gifted children. The five chapters in the book are titled *The Problem of Definition, A High IQ, Creativity, Logical Thinking,* and *Educating the Gifted Child.*

Sobel, Max A. *Teaching General Mathematics.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1967.

This book can be used by teachers as a source of topics and activities for slow learners in mathematics. It is intended for use as a teacher supplement for a standard course in general mathematics. Topics contained in the book are:

1. The Slow Learner
2. Survey of Related Curriculum Developments
3. Explorations with Numbers and Numerals
4. Explorations with Geometric Figures
5. Explorations with Computation and Mensuration
6. Explorations in Probability
7. Explorations with Mathematical Systems
8. Explorations with Mathematical Recreations

Stanley, Julian C., Keating, Daniel P., and Fox, Lynn H. (Editors). *Mathematical Talent: Discovery, Description, and Development.* Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1974.

Based upon the Third Annual Blumberg Symposium on Research in Early Childhood Education, this book contains sections about characteristics of mathematically precocious youth, methods for facilitating the educational development of the mathematically talented, a program for fostering mathematical achievement, and values and interests of the mathematically gifted.

Suydam, Marilyn N. *Teaching Mathematics to Disadvantaged Pupils: A Summary of Research.* Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center, April, 1971.

This publication contains an annotated bibliography of research studies and conclusions relative to teaching mathematics to "disadvantaged pupils."

Swain, Henry. *How to Study Mathematics: A Handbook for High School Students.* Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, 1970.

A good guide for both teachers and students, this monograph contains many practical suggestions about how to study mathematics reading assignments, how to use textbooks, how to do homework, how to make the most of the class period, how to take tests, and other "how to's" for studying mathematics.

Terman, L. M. (Editor) *Genetic Studies of Genius, Vols. I-V,* Stanford, California: Stanford University Press, 1925-1959.

The University of the State of New York. *Improving Reading-Study Skills in Mathematics Classes.* Albany, New York: New York State Department of Education, 1968.

This 25-page monograph contains some practical suggestions about how teachers can assist students in improving their reading and study skills in mathematics.

Travers, Kenneth J.; and others. *Teaching Resources for Low-Achieving Mathematics Classes.* Columbus, Ohio: ERIC Information Analysis Center, July, 1971.

According to the abstract, this booklet:

reviews teaching approaches and general resource materials for low achievers in both elementary and secondary mathematics classes. A survey of reported characteristics of low achievers is divided into two classes: (1) social and emotional problems, and (2) learning difficulties. . . .Teaching approaches which have been reported as being successful include the use of computational aids, manipulative devices, and laboratory techniques. Also reported was the development of individualized short-term curriculum units, emphasizing success and immediate reward. The two bibliographies included are: (1) a bibliography of general resource material, and (2) an annotated bibliography of articles which have appeared in *The Arithmetic Teacher* and *The Mathematics Teacher* which suggest lessons for low achievers.

Witty, P. A. "A Genetic Study of 50 Gifted Children." In Nelson B. Henry (Editor). *Intelligence: Its Nature and Nurture. Thirty-ninth Yearbook, National Society for the Study of Education, Part I.* Chicago: University of Chicago Press, 1940.

قائمة بآهم المصطلحات العلمية

Creative	إبداعى - إبتكارى
Reward	إثابة
Operational - operant	إجرائى
Hardware	أجهزة ثقيلة
Test	إختبار
Quiz	إختبار قصير (موجز)
Guiding (guide lines)	إرشادى (خطوط إرشادية)
Base	أساسى
Questionnaire	إستبانه
Retention	إستبقاء
Responding	إستجابة
Strategy	إستراتيجية
Retrieval	إسترجاعى
Induction	إستقراء
Inquiry	إستقصاء
Extrapolation	إستكمال
Technique	اسلوب
Divergent	إستنباط
Unferential	إستنتاجى
Assimilation	إستيعاب
Satisfaction	إشباع
Transcendental numbers	أعداد متسامية
Teacher education	إعداد معلم (مدرس)
Composite numbers	أعداد مؤلفة

Mapping	إقتران
Acquisition	إكتساب
Discovery	إكتشاف
Minimal	الحد الأدنى
Puzzles	ألغاز
Achievement	إنجاز
Readability	إنقرائية
Simultaneous	آنى (فى آن واحد)
Axiom	بديهية
Slow	بطىء
Post	بُعدى
Aversive and aversion	بُغض واجتناب
Formative	بنائى – تكوينى
Structure	بنية – تركيب
Datum / data	بيان / بيانات
Environment	بيئة
Consequence	تالٍ – عاقبة
Complete	تام – كامل
Divergent	تباعدى
Chunk	تجمع
Attainment	تحصيل
Analysis	تحليل
Teaching	تدريس
Reinforcement	تدعيم
Translation	ترجمة
Synthesis	تركيب

تسلسل	Chaining
تشاكل	Isomorphisim
تضمين	Implication
تطابق	Congruence
تطبيق	Application
تطوير	Development
تعلم	learning
تعلم إستظهارى	Rote - learning
تعلم إشارى	Signal learning
تعليم رياضيات	Mathematics education
تعليم فردى	Individualized instruction
تفريد	Individualization
تفسير – شرح	Explanation
تقاربى	Convergent
تقييم	Evaluation
تقييم عام	Assessment
تكامل	Integration
تكامل معتل	Improper integral
تكرارى	Iterative
تموينات	Supplies
تمييز	Characterization
تناظر أحادى	One - to - one correspondance
تنظيم	Organization
توزيعات مشتركة	Join distribution

حاصل ضرب جداء	Product
حدسى	Intuitive
حساب القياس	Modulas arithmetic
حسى	Sensory
حقيقة	Truth
حكم تقييمى (فى ضوء قيم معينة)	Valuing

Proproblem solving	حل المشكلات
Sprial	حلازونى
Quotient	خارج
Experience	خبره
Experientail	خبرى (عن خبرة)
False	خطأ
Pacing	خطو
Guide lines	خطوط إرشادية
Module	خلية تعليمية
Algorithm	خوارزمية (طريقة عمل إجرائية)
Motivational	دافعية
Exponential function	دالة أسية
Bounded function	دالة محدودة
Grade	درجة – صف
Semantics	دلالات الألفاظ
Memory	ذاكرة
Meaningful	ذو معنى
Quaternions	رباعيات (تتبع جبر الرباعيات لهاميلتون)
Junction	ربط
Symbolic	رمزى

Group	زمرة
listing	سرد
Authority	سلطة
Behavioral	سلوكى
Characteristics	سمات
Emotional maladjustment	سوء توافق إنفعالى
Tensor	شادة (تنسور)
Grid	شبكة (مربعات)
Formal	شكلى
Valid	صالح
Equivalence class	صف تكافؤ
True	صواب
Validity	صلاحية
Mathematical Atrophy	ضمور (ضعف) رياضى
Gifted student	طالب موهوب
Categorical	طبقى
Storage phase	طور التخزين
Apprehending	طور الوعى (الإدراك)
Autcome	عائد – مردود
Factor	عامل
Statement	عبارة/ تقرير

Prime - number	عدد أولى
Integer	عدد صحيح
Irrational number	عدد غير نسبى
Hyper complex number	عدد فوق مركب
Cardinal number	عدد كاردينالى
Complex number	عدد مركب
Aational number	عدد نسبى
Discontinuity	عدم إتصال
Expository	عرض مباشر
Random	عشوائى
Punishment	عقاب
Intellectual	عقلى
Rational	عقلانى
Calculus	علم التفاضل والتكامل (علم الحسبان)
Equilibration	عمل إتزان
Essociative operation	عملية تجميعية
Process - processing	عملية – تشغيل
Binary operation	عملية ثنائية
Orthogonal	عمودى
Identity element	عنصر محايد
Marks	علامات – درجات
Goal	غاية – هدف عام
Undecidable	غير مفصول فيه
Metric space	فراغ مترى
Unique	فريد – وحيد
Class	فصل (مجموعة)
Disjunction	فصل منطقى
Space	فضاء

فضاء عينه	Aample space
فضولى	Obtrusive
فهم	Comprehension
فيزيائى – فيزيقى	Physical

قاعدة	Rule
قاعة – ثبت	list
قانون الرفع المنطقى	Modus tollens
قانون الوضع المنطقى	Modus ponens
قبلى	Pre
قدرة	Ability
قسرى – وضعى	Arbitrary
قضية	Proposition
قطوع	Cuts
قيمة	Value

كامن	Potential
كرة زائفة/ شبه كرة	Pseudosphere
كفاءة – مهارة	Competency
كميات جذرية	Radicals
كميات متناهية فى الصغر	Infinitismals
كمبيوتر/ حاسوب	Computer

لعبة	Game
لفظى	Verbal
لوغاريتم	logarithm

Proficient	ماهر
Principle	مبدأ
Underachever	متأخر فى التحصيل
Vector	مُتجه
Consistent	متسق
Student centered	متمركز حول الطالب
Counter example	مثال مضاد
Ideal	مثالى
Stimuluse	مثير
Abstract	مجرد
Set Group	مجموعة
Infinite set	مجموعة غير منتهية
Connected set	مجموعة مترابطة
Convex	محدب
Finite	محدد
Concrete	محسوس – عيانى
Criterion	محك
Figural	مختصة بالشكل
Schemas	مخططات
Outline	مخطط عام
Flow chart	مخطط متدفق
Review	مراجعة
Augmented	مزود
Problem	مسألة

Independent	مستقل
Continuous	مستمر
Postulate	مُسلمه
Discipline problems	مشكلات الانضباط
Matrix	مصفوفة
Hostile	مُعادٍ – غير ودى
Knowledge	معرفة
Cognition	معرفة
Cognitive	معرفى
Paradox	معضلة/ متناقضة
Complex	معقد/ مركب
Inverse	معكوس/ نظير
Concept	مفهوم
Concave	مقعر
Argument	مناقشة
Logic	منطق
Integral domain	منطقة الأعداد الصحيحة
Advance organizer	منظم خبرة متقدم
Courseware	مواد المقررات (بالكمبيوتر)
Software	مواد خفيفة (بالكمبيوتر)
Operator	مؤثر
Rating acale	ميزان تقديرات

Activity	نشاط
Maturation	نضج
Domain	نطاق – مجال
Numeration system	نظام عد
Modular system	نظام مقياسى
Mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Number theory	نظرية الأعداد

Theory of types	نظرية الأنماط
Lemma	نظرية تمهيدية
Psychomotor	نفسي حركي
Aura	هالة
Affective	وجداني
Working sheet	ورقة عمل
Descriptive	وصفي
Conjunction	وصل
Appreciate	يثمن/ يقدر
Discriminate	يمايز
Impart	ينقل

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٨	٧	نتحرر	التحرر
	٢١	إن أحد	إن إحدى
١٩	٢	مخصوصة لبرامج	خاصة ببرامج
	١٢	وضعت لمحتوى	وضعت لتناسب
	٢٢	سابقا النظر	سابقاً ، وبالنظر
٢٥	٥	الثقافية	الثقافة
	١٩	الخمس عشرة سنوات	الخمس عشر سنة
	٢١	التعلمية	التعليمية
٢٨	٢٦	الكمبيوتى	الكمبيوتر
٣٢	٢	المقرارت	المقررات
٣٣	٤	أو يفرغ	أو عندما يفرغ
٣٥	٧	خاص تعليم الزامى	خاصة تعليم إلزامى
	١٧	وعلى أية الأحوال	وعلى أى الأحوال
	٢٠.	الإختيار من	الخيار
٣٦	٢٨	تعملها	تعلمها
٤١	٤	ذات	ذوى
٤٤	٢٥	عال	عالياً
٥٠	١٣	فإن من المفضل	فإنه من المفضل
٥١	١٩	إذا مايمكن	إذا كان يمكن
	٢٣	العلبة الاسطوانة	العلبة الأسطوانية
٦٣	١٣	سوف يستمع	سوف يستمتع
٦٦	١٦	نهذه	هذه
٦٨	١٣	التعليم / التعليم	التعليم / التعلم
٧٠	٦	نشاط مبدىء	نشاط مبدئى
	١٩	المنزل	المنزلى
٧١	١	تأخذ	تؤخذ

الصفحة	السطر	الخطـــــأ	الصـــــواب
	٤	قامئة	قائمة
٨٢	٢٦	زاويا	زوايا
	٢٨	تمثل كل خاصة	تمثل كل خاصية
٨٣	٢٠	وحتى يطمأن	وحتى يطمئن
٨٧	١٥	المنظمومة	المنظومة
٩٨	٥	أن ويجد	أو أن يجد
٩٩	٣	تقويم المعلمومات	تقويم المعلومات
١٠١	١٩	قبل أن تمت	قبل أن يتم
١١٢	٢١	أن	، إذن :
١٢٩	٢٢	Lebsgue Itegral	Lebesgue Integral
١٣١	٥	وكلما نمى الطلاب عقليا الأكثر تجريدا أو تعميما لتلك المفاهيم ..	وكلما نما الطلاب ذهنياً يصبحون أكثر مقدرة على فهم وتطبيق المقتطفات والتمثيلات العامة لهذه المفاهيم ..
١٣٣	١٦	ويستظهر	ويستظهرونها
١٣٤	٧	فإن يجب	فإنه يجب
	١٩	المفاهين	المفاهيم
	٢٦	وتلعم	وتعلم
١٣٥	٦	وحد	وأعد
١٤٣	٢	الرغم منذ	الرغم من
١٥٩	١٨	ب $\neq$	ب $\neq$ صفر
١٦٠	١٨	الأسانير	الأسانيد
١٦٢	٩	المفيدة الطلاب	المفيدة لتدريس الطلاب
١٦٧	١٤	المثال تم	المثال تمت
١٧٠	١٤	مما يجعل مادة	مما يجعل المادة
١٧١	٢٦	أهمية التحقيق	أهمية التحقق
١٧٢	٢٦	مساحته حت أو	مساحته أوحت
١٧٥	١	لمهاجهة	لمهاجمة
	٤	مالمعلوم	ما المعلوم
	١٧	مالإجراءات	ما هى الإجراءات
١٨٣	١٧	لأجاد	لإيجاد

الصفحة	السطر	الخطــــأ	الصـــــواب
١٨٥	٣	المكشلة	المشكلة
	٦	واقتراحات	واقتراحاتك
	٨	أيثيب	أثب
١٨٧	٣	تعلمية	تعليمية
	٢٧	التجاب	التجارب
١٨٨	٥	بطىء	بطيئى
	١٣	المعلمية	المعملية
	٢٢	المعلمى	المعملى
١٨٩	٢٣	استعمال من	استعمال ركن من
١٩٠	٢٢	الحال عن	الحال عند
١٩٢	٤	بحيث عامة	بحيث تعطى علاقة عامة
	٦	المغيرات	المتغيرات
١٩٣	٤	حلاً تقريباً	حلاً تقريبياً
١٩٤	٤	الشكبة	الشبكة
١٩٦	٢	القطرات المختلف	القطران المتخلف
١٩٧	١	للمحنى	للمنحنى
٢٠٩	٢٢	احتمالاتلك	احتمالاتك
١٢٠	٤	النفقود ، لمذا	النقود ، لذا
٢١٢	٢٩	ما لخطوات	ما الخطوات
٢١٧	١٢	جماعى الموقف	جماعى للموقف
٢٢٨	١٢	Hardwore	Hardware
	١٣	Saftwro	Software
	١٣	Corsewore	Courseware
٢٣١	٢٢	الحقيق	الحقيقى
٢٣٦	٨	ط ــ المثال المضاد	ط ــ اثبات غير مباشر